

关于效率的数学模型

陈 俊

el2718@mail.ustc.edu.cn

中国科学技术大学地球与空间科学学院

更新时间：2024 年 6 月 19 日

摘要

2014 年 USTC 秋季学期《自然辩证法概论》的结课论文。

1 矢量叠加的方式

N 个矢量，长度为 d ，方向各自随机，它们叠加求和，模平方的期望值：

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right)^2 &= E \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i^2 \right) + E \left(\sum_{i \neq j}^N \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \right) \\ &= N d^2 + d^2 E \sum_{i \neq j}^N \cos \langle \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \rangle \end{aligned}$$

由于方向随机，等式右边第二项为 0，有期望 $E \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \right)^2 = N d^2$ ，故叠加后的长度大致为 $\sqrt{N} d$ 。像光子从太阳日核聚变区跑到光球，需要数百万年，就是中间经过太多次随机碰撞，吸收——发射——吸收——发射，平均自由程太短，方向完全随机，即便光速也被困在里面。但如果 N 个矢量方向一致，叠加后的长度为 $N d$ 。

2 类比于工作效率

如果我们做一件事情，迷茫，没有计划，完全随性而行，效率一般底下。比如为某件事，总耗时 T ，专注了 N 次，平均一次专注时间 t ， $t N = T$ 。但 N 次

之间没有联系,效果 P 就是 $C\sqrt{N}t$ (C 为效率与时间的某比例常数),如果总耗时 T 不变,提高单次专注时间为 t_1 ($t_1 > t$),降低专注次数为 N_1 ($N_1 < N$),仍有 $t_1 N_1 = T$, C 不变,效果 $C\sqrt{N_1}t_1 = C\frac{T}{\sqrt{N_1}} > C\frac{T}{\sqrt{N}} = C\sqrt{N}t$,效果就提高了。但很有目的、计划, N 次工作之间联系紧密, $E = CNd$ 。

N 经常是比较大的。设 $C = 1/\text{小时}$, 我们一般专注的时间较长也就是两小时, 一天大概是六次 (上午、下午、晚上各两次), 其余时间耗费在基本生活需要上。完成一件事的时间限期一个月, $N = 6 \times 30 = 180$, $\sqrt{N} = \sqrt{180} = 13.4$, 没计划的 $P = 26.8$ 。很多时候由于各种原因, 专注的时间也许就半小时, $N = 720$, $P = \sqrt{720} \times 0.5 = 13.4$, 如果是有计划的工作, $P = 12 \times 30 = 360$, 区别极其明显。

如果是多个人共同完成一件事情, 没有有力的领导, 没有明确的分工, 也有这样的情况。 m 个人, 每个人工作量 P_1 , 总效果却可能是 $\sqrt{m}P_1$ 。有力的领导、明确的分工, 效果就是 mP_1 。一个小团体大概 9 人, $\sqrt{9} = 3$, 区别还是较大的。

2.1 小结

所以提高效率有 3 个比较合理的做法:

1. 有目的、有计划地安排工作, 让前后联系紧密, 这会让效果提高显著。
2. 提高效率与时间的比例常数 C , 即提高专注工作时的效率, 这需要个人精神状态、意志力、能力、方法、熟练度的提升。
3. 提高专注的时间 t , 克制诱惑, 不要被无关紧要的事情打断。但也有上限, 时间过长可能由于疲劳导致 C 下降, 这时最好休息。

3 效率的耦合

方向明确的工作是线性 (一次) 增长, 无计划的工作是 \sqrt{N} 增长。那怎么解释一些人的最后成功最后是那么不可思议呢? 线性增长绝对是不够的, 还有多个人合作的时候要产生 $1 + 1 > 2$ 的效果, 协同创新比单干好, 不然合作就没有意义了, 这又怎么办到?

增长实际是有基础的, 基础是 P_0 , C 可以不是常数, 让它正比于 P_0 , 但要求做事的人非常智慧, 让前后的工作能有机的耦合起来, 或让各个成员的分工作能相互耦合, 紧密联系。

在方向明确的前提下，单位时间增长的成果 $\frac{dP}{dt}$ 正比于已有的成果 P_0 ，方程 $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{\tau} P$ ，(τ 为某时间常数，做事的人越智慧，方案越巧妙， τ 越小)。解得 $P(t) = P(0) e^{\frac{t}{\tau}}$ ，即可以指数增长，效果惊人！

4 讨论

实际工作中可能遇到困难，瓶颈，指数增长到一定程度后便很难保持原有的增长方式，停滞不前甚至下降。但如果经过努力克服掉这一困难，又能开始新一轮的指数增长。但克服困难、突破瓶颈的过程又是一个摸索的过程，进展可能很缓慢，随机性很强，为 \sqrt{N} 增长。

像中国的经济增长方式应该可以这么解释，在持续了 30 年的高速增长后，由于资源、环境、国际经济背景的制约，必须改革。

学习应该是非常有效提升自己的方式，学习的知识是前人总结的经验，他们走过的弯路我们不必再走，方向明确得多，所以至少是线性增长，实际由于各部分知识（尤其是数理知识）的相互耦合联系，应该呈指数增长。而靠经验提升，随机性太强，是 \sqrt{N} 增长，所以经验积累到一定程度后，对人的提升就很不明显了，去学习吧！

2014 年夏听科大荣誉教授梅德韦杰夫的报告时候，有人提到科研经费使用效率很低。这很正常，科研是在最前沿探索，几乎没有方向，需要灵感、运气，随机性太强了， \sqrt{N} 增长能不低吗？但科研又是必须的，克服困难、突破瓶颈就靠科研，投入到生产应用后，那一方面再次勃发生机，实现指数增长。

对一个研究生来说，通过科研获得的新知识相比学习必定非常少，主要锻炼的是独立思考、独立发现、解决问题的能力。这跟个人的素质有很大关系，到底要不要继续科研，也要看自己适不适合这样的工作方式，能不能独立思考、独立发现、解决问题？

为什么意志力很重要？为什么专注的人可怕？为什么社会重视聪明人？这下都可以解释了，定量的解释。尽量避免 \sqrt{N} 增长，无法避免时提高这样增长方式的效果也有对策。一般要线型增长，最好是指数增长。意志力、专注、智慧都会起到相应的作用。