# 速度势、流函数细谈

陈俊

el2718@mail.ustc.edu.cn

更新时间：2024 年 8 月 18 日

**前言**

本文成型于 2014 年 USTC 秋季学期任《流体力学》助教时，2023 年将格式规范化。与 [基矢量与张量] 互为补充，读过 [基矢量与张量] 后再读这篇会更顺畅。这里借速度势、流函数将场的一些性质讲清楚。

# 目录

# 1 外微分

在 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 间定义一种乘法，称为“外积”，有（两两交换位置反号）：

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$$
$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

后面两行出现的表达式可以认为是有向面元、有向体元。

对三维空间，外微分形式最高为 3 次。求梯度对应将 0 次外微分形式变为 1 次外微分形式：

$$\mathrm{d}\,\omega 0 = \frac{\partial\,\omega 0}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\,\omega 0}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\,\omega 0}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

求旋度对应将 1 次外微分形式变为 2 次外微分形式：

$$\omega 1 = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \tag{2}$$
$$\mathrm{d}\omega 1 = (\frac{\partial\,R}{\partial y} - \frac{\partial\,Q}{\partial z})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\frac{\partial\,P}{\partial z} - \frac{\partial\,R}{\partial x})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\frac{\partial\,Q}{\partial x} - \frac{\partial\,P}{\partial y})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{3}$$

求散度对应将 2 次外微分形式变为 3 次外微分形式：

$$\omega 2 = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{4}$$
$$\mathrm{d}\omega 2 = (\frac{\partial\,P}{\partial x} + \frac{\partial\,Q}{\partial y} + \frac{\partial\,R}{\partial z})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \tag{5}$$

## 1.1 Poincaré 引理

设 $\omega$ 是一个微分形式，其系数具有二阶连续的偏微商，则

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0 \tag{6}$$

由此可得，任意标量场 $f$ 的梯度的旋度为 $\overrightarrow{0}$，任意矢量场 $\overrightarrow{g}$ 的旋度的散度为 0:

$$\nabla \times \nabla f = \overrightarrow{0}, \tag{7}$$
$$\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{g} = 0. \tag{8}$$

## 1.2 Poincaré 引理之逆

对于外微分形式 $\omega$，如果 $\mathrm{d}\omega=0$，则存在一个比 $\omega$ 低一次的外微分形式 $\Theta$，满足 $\omega=\mathrm{d}\Theta$. 通过式(7)(8)，并由 Poincaré 引理之逆可以得到:

$$\nabla\times\vec{g}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在 } f,\ \text{使得 } \nabla f=\vec{g} \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\vec{h}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在 } f,\ \text{使得 } \nabla\times\vec{g}=\vec{h} \tag{10}$$

## 1.3 线积分的可积性条件

一次外微分形式(2)一般不能写成一个场的全微分形式，即不满足存在 $\Theta(x,\,y,\,z)$，满足

$$\mathrm{d}\Theta(x,\,y,\,z)=P(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}y+R(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}z, \tag{11}$$

但若

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{12}$$

(2)的外微分(3)为 0，由 Poincaré 引理之逆，此时式(11)成立，积分形式就是

$$\Theta(x,\,y,\,z)=\int P(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}y+R(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}z. \tag{13}$$

所以(12)是三维下一个线积分可取任意路径的可积性条件。

### 1.3.1 二维情形

也就是特别地去掉(2)的 $z$ 坐标，$R$, $\mathrm{d}z$ 为 0，当

$$\frac{\partial P(x,\,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,\,y)}{\partial x} \tag{14}$$

时，有

$$\mathrm{d}(P(x,\,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,\,y)\,\mathrm{d}y)=(\frac{\partial Q(x,\,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,\,y)}{\partial y})\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

由 Poincaré 引理之逆，此时存在 $\Theta(x,\,y)$，使得

$$\mathrm{d}\Theta(x,\,y)=P(x,\,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,\,y)\,\mathrm{d}y. \tag{15}$$

积分形式为

$$\Theta(x,\, y) = \int P(x,\, y)\,\mathrm{d}x + Q(x,\, y)\,\mathrm{d}y. \tag{16}$$

同样的，(14)就是二维下一个线积分可取任意路径的可积性条件。

## 1.4 Gauss-Stokes 公式

### 1.4.1 常用形式

微积分基本定理，即 Newton-Leibniz 公式为

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \tag{17}$$

它的三维形式为:

$$f(\vec{r_2}) - f(\vec{r_1}) = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \nabla f \cdot \vec{\mathrm{d}l}. \tag{18}$$

记 $\Omega$ 为某空间区域，$\partial\Omega$ 为其边界，对某微分形式 $\omega$ 与其外微分形式 $\mathrm{d}\omega$，微积分基本定理可以推广为 Gauss-Stokes 公式:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega \tag{19}$$

具体到各种积分就得到我们常用的

Stocks 定理（记 $\vec{n}$ 为单位外法向）:

$$\oint_{\partial S} \vec{g} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \int_S (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{20}$$

Gauss 定理:

$$\int_{\partial V} \vec{g} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}V \tag{21}$$

Green 第一公式（Gauss 定理推得）:

$$\int_{\partial V} u\nabla v \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V (u\nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v)\,\mathrm{d}V \tag{22}$$

Green 第二公式（Green 第一公式推得）:

$$\int_{\partial V} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}V \tag{23}$$

记 Helmholtz 算子 $L=\nabla^2\pm k^2$，Helmholtz 算子下 Green 第二公式：

$$\int_{\partial V}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int_V(u\,L\,v-v\,L\,u)\,\mathrm{d}V \tag{24}$$

### 1.4.2 二维退化

若空间退化为二维，$\vec{g}$ 的第三分量 $g_z=0$。

Green 定理（Stocks 定理二维退化）：

$$\oint_{\partial S}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_S(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{25}$$

Gauss 定理二维退化：

$$\oint_{\partial S}\vec{g}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\int_S\nabla\cdot\vec{g}\,\mathrm{d}S \tag{26}$$

其中 $\vec{n}$ 仍为单位外法向，$\vec{n}\,\mathrm{d}l$ 为 $\vec{\mathrm{d}l}$ 顺时针旋转 $\pi/2$。上式还可以通过 Stokes 定理(20)推导。平面矢量顺时针旋转 $\pi/2$ 可以通过叉乘 $\vec{e_z}$ 得到。式(26)左边写为

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S}\vec{g}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l&=\oint_{\partial S}\vec{g}\cdot(\vec{\mathrm{d}l}\times\vec{e_z})\\&=\oint_{\partial S}(\vec{e_z}\times\vec{g})\cdot\vec{\mathrm{d}l}\\&=\int_S(\nabla\times(\vec{e_z}\times\vec{g}))\cdot\vec{e_z}\,\mathrm{d}S\\&=\int_S((\nabla\cdot\vec{g})\,\vec{e_z}-(\nabla\cdot\vec{e_z})\,\vec{g})\cdot\vec{e_z}\,\mathrm{d}S\\&=\int_S\nabla\cdot\vec{g}\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{27}$$

Green 第一公式二维退化：

$$\oint_{\partial S}u\nabla v\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\int_S(u\nabla^2v+\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}S \tag{28}$$

Green 第二公式二维退化：

$$\oint_{\partial S}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\int_S(u\nabla^2v-v\nabla^2u)\,\mathrm{d}S \tag{29}$$

Helmholtz 算子下 Green 第二公式二维退化：

$$\oint_{\partial S}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\int_S(u\,L\,v-v\,L\,u)\,\mathrm{d}S \tag{30}$$

### 1.4.3 标量退化

若 $\vec{g}=\vec{c}\,f$，$\vec{c}$ 为任意常矢量，带入式(20)(21)，就有

$$\text{Stocks 定理标量退化}\qquad \oint_{\partial S} f\,\mathrm{d}\vec{l}=\int_S \vec{n}\times\nabla f\,\mathrm{d}S \tag{31}$$

$$\text{Guass 定理标量退化}\qquad \int_{\partial V} f\,\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int_V \nabla f\,\mathrm{d}V \tag{32}$$

### 1.4.4 张量形式

这一节需要 [基矢量与张量] 的预备知识。任意二阶张量都可以分解成三个并矢的和的形式

$$\vec{\vec{T}}=\vec{f}_1\,\vec{e}_x+\vec{f}_2\,\vec{e}_y+\vec{f}_3\,\vec{e}_z \tag{33}$$

其中

$$\vec{f}_1=T_{i1}\,\vec{e}_i,\ \ \vec{f}_2=T_{i2}\,\vec{e}_i,\ \ \vec{f}_3=T_{i3}\,\vec{e}_i \tag{34}$$

式(33)带入式(20)(21)，就有

$$\text{Stocks 定理张量形式}\qquad \oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{\vec{T}}=\int_S \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{\vec{T}})\,\mathrm{d}S \tag{35}$$

$$\text{Guass 定理张量形式}\qquad \int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{\vec{T}}\,\mathrm{d}S=\int_V \nabla\cdot\vec{\vec{T}}\,\mathrm{d}V \tag{36}$$

### 1.4.5 叉乘形式

若

$$\vec{\vec{T}}=-\vec{g}\cdot\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \tag{37}$$

带入式(35)(36)，经过推导得到

$$\text{Stocks 定理叉乘形式}\qquad \oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{g}=\int_S (\vec{n}\times\nabla)\times\vec{g}\,\mathrm{d}S \tag{38}$$

$$\text{Guass 定理叉乘形式}\qquad \int_{\partial V} \vec{n}\times\vec{g}\,\mathrm{d}S=\int_V \nabla\times\vec{g}\,\mathrm{d}V \tag{39}$$

# 2 速度势

如图1，如果矢量场的线积分不依赖于路径，即对于任意连接点 $A$, $B$ 的路径 $l1$, $l2$, 有

$$\underset{l1}{\int_A^B}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\underset{l2}{\int_A^B}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

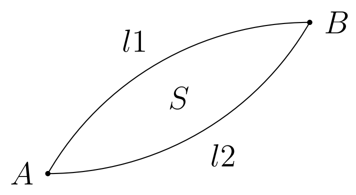


图 1: 积分路径图。

那么在 $l1+l2$ 构成的闭合回路上，记 $S$ 为 $l1+l2$ 包围区域，就有

$$\oint_{l1+l2} \vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0 \overset{\text{Stocks 定理(20)}}{\Longleftrightarrow} \int_S \nabla\times\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

由 $l1, l2$ 的任意性，得到 $\nabla\times\vec{u} = \vec{0}$。所以无旋时计算线积分时不依赖于路径，可以定义速度势

$$\chi(\vec{r}) = \int_{\mathrm{A}}^{\vec{r}} \vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{l}, \tag{40}$$

还可以看到无旋满足可积性条件(12)，故上式是可积的。$\chi$ 的梯度即为速度

$$\nabla\chi = \vec{u}. \tag{41}$$

所以式(40)其实就是式(18)。对比(9)，发现又是一致的。

空间为二维时，$\partial_z = 0$, $u_z = 0$，无旋即为

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \tag{42}$$

其实就是可积性条件(14)。式(41)在二维笛卡尔直角坐标下即为

$$u_x = \frac{\partial\chi}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial\chi}{\partial y}. \tag{43}$$

$\nabla$ 写为极坐标下表示即可得到极坐标下结果。三维情况将 $\nabla$ 写为笛卡尔直角坐标、柱坐标、球坐标下表示（见 [基矢量与张量]）即可得到相应表达。

故对一个矢量场，如果有势，就会无旋。无旋看上去是三个标量方程，对矢量场有三个约束。但是这三个标量方程并不完全独立，仍需要一个标量场（也就是势）去描述这个矢量场。

# 3 流函数

设图1在二维平面上，计算点 $A$ 到点 $B$ 间的速度通量，若计算结果不依赖于路径，有

$$\int_{\substack{A\\l1}}^{B}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\int_{\substack{A\\l2}}^{B}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l\Leftrightarrow\oint_{l1+l2}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=0\xLeftrightarrow{\text{二维 Gauss 定理(26)}}\int_S\nabla\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}S=0\xLeftrightarrow{l1,l2\text{ 任意}}\nabla\cdot\vec{u}=0$$

所以无散时计算速度通量不依赖于积分路径，此时可以定义流函数

$$\psi(\vec{r})=\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l, \tag{44}$$

其中 $\vec{r_0}$ 为参考点，可任取。故流函数存在的条件为无散。可以想像，若 $S$ 中有源，通过 $l1, l2$ 通量必不相等，也就无法定义流函数。

## 3.1 二维笛卡尔直角坐标下流函数

有向线元为

$$\vec{\mathrm{d}l}=\vec{e_x}\,\mathrm{d}x+\vec{e_y}\,\mathrm{d}y, \tag{45}$$

$$\text{故}\qquad \vec{n}\,\mathrm{d}l=\vec{\mathrm{d}l}\times\vec{e_z}=\vec{e_x}\,\mathrm{d}y-\vec{e_y}\,\mathrm{d}x. \tag{46}$$

流速

$$\vec{u}=u_x\,\vec{e_x}+u_y\,\vec{e_y}. \tag{47}$$

所以式(44)为

$$\psi(x,\,y)=\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)}u_x\,\mathrm{d}y-u_y\,\mathrm{d}x. \tag{48}$$

上式分别对 $x, y$ 求偏导，得到流函数与速度的微分关系

$$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{49}$$

## 3.2 极坐标下流函数

极坐标下有

$$\vec{u}=u_\rho\,\vec{e_\rho}+u_\varphi\,\vec{e_\varphi}, \tag{50}$$

$$\vec{\mathrm{d}l}=\vec{e_\rho}\,\mathrm{d}\rho+\vec{e_\varphi}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi, \tag{51}$$

$$\vec{n}\,\mathrm{d}l = \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e_z} = \vec{e_\rho}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi - \vec{e_\varphi}\,\mathrm{d}\rho, \tag{52}$$

代人式(44)，有

$$\psi(\rho,\varphi) = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} u_\rho\,\rho\,\mathrm{d}\varphi - u_\varphi\,\mathrm{d}\rho, \tag{53}$$

上式分别对 $\rho, \varphi$ 求偏导，得到

$$u_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,\psi}{\partial\varphi},\ u_\varphi = -\frac{\partial\,\psi}{\partial\rho}. \tag{54}$$

### 3.3 无散与流函数可积的关系

$\nabla\cdot\vec{u} = 0$ 在二维笛卡尔直角坐标和极坐标下的形式分别为

$$\frac{\partial\,u_x}{\partial x} + \frac{\partial\,u_y}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial\,(\rho\,u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial\,u_\varphi}{\partial\varphi} = 0.$$

这就保证了积分(48)(53)是满足可积性条件式(14)的，故是可积的。

### 3.4 流线

设一条流线上的点的位置函数为 $\vec{r}(s)$，其中 $s$ 为弧长参数。那其线元必然与流场平行，即

$$\mathrm{d}\vec{r}(s) \quad || \quad \vec{u} \tag{55}$$

为简洁不标记自变量 $s$，二维笛卡尔直角坐标下有

$$\vec{r} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y}, \tag{56}$$

$$\text{微分为} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{e_x} + \mathrm{d}y\,\vec{e_y}. \tag{57}$$

要满足(55)就有

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y}, \tag{58}$$

为二维笛卡尔直角坐标下的流线方程。

极坐标下有

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e_\rho}, \tag{59}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{60}$$

要满足(55)就有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{u_\rho} = \frac{\rho\,\mathrm{d}\varphi}{u_\varphi}, \tag{61}$$

为极坐标下的流线方程。

同样方式还可以得到三维下，笛卡尔直角坐标，柱坐标，球坐标的流线方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z}, \tag{62}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{u_\rho} = \frac{\rho\,\mathrm{d}\varphi}{u_\varphi} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z}, \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{u_r} = \frac{r\,\mathrm{d}\theta}{u_\theta} = \frac{r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi}{u_\varphi}. \tag{64}$$

它们其实都是矢量形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{65}$$

在不同坐标系下的表达。

#### 3.4.1 流线与流函数

记 $\psi_1$ 为某常数，对流函数 $\psi(x, y) = \psi_1$ 求全微分，有

$$\frac{\partial\,\psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\,\psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

将(49)代入，正好是式(58)。更换坐标，对流函数 $\psi(\rho, \varphi) = \psi_1$ 求全微分，有

$$\frac{\partial\,\psi}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial\,\psi}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

将(54)代人，又正好是式(61)。

所以 $\psi = \psi_1$ 对应了一条二维流线，改变 $\psi_1$ 的值，就有同一流场下的不同流线。物理上成立的事情是不依赖于坐标系的，不同的坐标系下表述不同而已。但流线不一定正好是 $\psi = \psi_1$，因为再做个一一映射 $p(\psi) = p(\psi_1)$ 也是流线。流函数与流线的另一个区别是，流函数存在要求速度场无散，而流线方程式(55)不要求，不过如果速度场有散可以出现流线交叉的情况。

### 3.5　三维流函数

一个矢量场须由三个标量场确定，无散对三个标量场有个约束。三个标量场函数不独立，这个矢量场可能只要两个标量场函数就可以确定。定义（类比磁场的欧拉势）

$$\vec{u} = \nabla\alpha \times \nabla\beta \overset{\text{式(7)}}{=} \nabla \times (\alpha\nabla\beta). \tag{66}$$

由式(8)上式右边求散度为 0，正好符合(10)。在过 $A$ 点 $\alpha$ 的等值面

$$\alpha(x, y, z) = \alpha|_A \tag{67}$$

上，设 $\vec{\mathrm{d}r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ 为此等值面上的一线元，对式(67)两边求全微分，有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\,\alpha}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\,\alpha}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\bigg|_A &= 0,\\ \text{即}\qquad \nabla\alpha|_A \cdot \vec{\mathrm{d}r} &= 0.\end{aligned} \tag{68}$$

故 $\nabla\alpha|_A$ 为曲面 $\alpha = \alpha|_A$ 过 $A$ 点的一个法向矢量，同理 $\nabla\beta|_A$ 为曲面 $\beta = \beta|_A$ 过 $A$ 点的一个法向矢量。叉乘后与原两矢量都垂直，那么(66)说明 $\vec{u}|_A$ 与 $\alpha = \alpha|_A$、$\beta = \beta|_A$ 相切。即 $\alpha = \alpha|_A$ 为过 $A$ 点的一个流面（流线处处与之相切，若一根流线与此面有交点，这根流线的所有点就都在此面上），对 $\beta$ 亦是如此。所以 $\alpha = \alpha|_A$ 与 $\beta = \beta|_A$ 的交线为过 $A$ 点的一条流线。

记 $S$ 为空间中以某闭合曲线 $\partial S$ 为边界的任意曲面（任意性恰由无散保证）

$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \int_S \nabla \times (\alpha\nabla\beta) \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \oint_{\partial S} \alpha\nabla\beta \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \oint_{\partial S} \alpha\,\mathrm{d}\beta \tag{69}$$

用 $\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2$ 四个曲面 $(\alpha_1 < \alpha_2, \beta_1 < \beta_2)$ 为边裁出一根流管 $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$，设 $S_0$ 为此流管的一个截面，$\vec{\mathrm{d}S}$ 与 $\vec{u}$ 基本同向，则

$$\begin{aligned}\int_{S_0} \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{d}S} &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha\,\mathrm{d}\beta\bigg|_{\beta=\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \alpha_2\,\mathrm{d}\beta + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \alpha\,\mathrm{d}\beta\bigg|_{\beta=\beta_2} + \int_{\beta_2}^{\beta_1} \alpha_1\,\mathrm{d}\beta\\ &= 0 + \alpha_2\,(\beta_2 - \beta_1) + 0 - \alpha_1\,(\beta_2 - \beta_1)\\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)\,(\beta_2 - \beta_1).\end{aligned} \tag{70}$$

任意截面都可以由无数个类似 $S_0$ 的小矩边曲面拼接而成，这些矩边曲面的通量都已由式(70)确定，对这些通量求和，式(69)等价于

$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \int_S \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{71}$$

所以 $\alpha, \beta$ 仍是速度通量积分，仍可称为流函数。

### 3.5.1 速度场某分量为 0 时

若对于速度场处处有 $u_z = 0$，那么 $z = z_1$ 为流面。可取 $\beta = z$，则 $\nabla\beta = \vec{e_z}$，有

$$
\begin{aligned}
&& \vec{u} &= \nabla\alpha \times \vec{e_z} \\
&\text{笛卡尔直角坐标下} & u_x &= \frac{\partial\,\alpha}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\,\alpha}{\partial x}. \\
&\text{柱坐标下} & u_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial\,\alpha}{\partial \rho}.
\end{aligned}
$$

注意 $\vec{u}, \alpha$ 可以随 $z$ 坐标变化。当 $\dfrac{\partial\,\alpha}{\partial z} = 0$ 时，$\alpha$ 就是二维笛卡尔直角坐标、极坐标下的流函数。

若对于速度场处处有 $u_\varphi = 0$，那么 $\varphi = \varphi_1$ 为流面。可取 $\beta = \varphi$，则对于柱坐标

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= \nabla\alpha \times \nabla\beta \\
&= (\vec{e_\rho}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \rho} + \vec{e_\varphi}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \varphi} + \vec{e_z}\frac{\partial\,\alpha}{\partial z}) \times (\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}) \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\,\alpha}{\partial z}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \rho}\,\vec{e_z},
\end{aligned}
$$

$$
\text{即} \qquad \frac{\partial\,\alpha}{\partial \rho} = \rho\,u_z, \ \frac{\partial\,\alpha}{\partial z} = -\rho\,u_\rho. \tag{72}
$$

对于球坐标

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= \nabla\alpha \times \nabla\beta \\
&= (\vec{e_r}\frac{\partial\,\alpha}{\partial r} + \frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \theta} + \frac{\vec{e_\varphi}}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \varphi}) \times (\frac{\vec{e_\varphi}}{r\,\sin\theta}) \\
&= \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial\,\alpha}{\partial \theta}\,\vec{e_r} - \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\,\alpha}{\partial r}\,\vec{e_\theta},
\end{aligned}
$$

$$
\text{即} \qquad \frac{\partial\,\alpha}{\partial r} = -r\,\sin\theta\,u_\theta, \ \frac{\partial\,\alpha}{\partial \theta} = r^2\,\sin\theta\,u_r. \tag{73}
$$

由速度场无散（散度公式见 [基矢量与张量]），

$$
\text{柱坐标下} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,(\rho\,u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial\,u_z}{\partial z} = 0, \tag{74}
$$

$$
\text{球坐标下} \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,u_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\,u_\theta) = 0, \tag{75}
$$

可知式(72)(73) 都满足可积性条件式(14)，可以构造流函数，

$$
\text{柱坐标下} \qquad \alpha = \int \rho\,u_z\,\mathrm{d}\rho - \rho\,u_\rho\,\mathrm{d}z, \tag{76}
$$

$$
\text{球坐标下} \qquad \alpha = \int -r\,\sin\theta\,u_\theta\,\mathrm{d}r + r^2\sin\theta\,u_r\,\mathrm{d}\theta. \tag{77}
$$

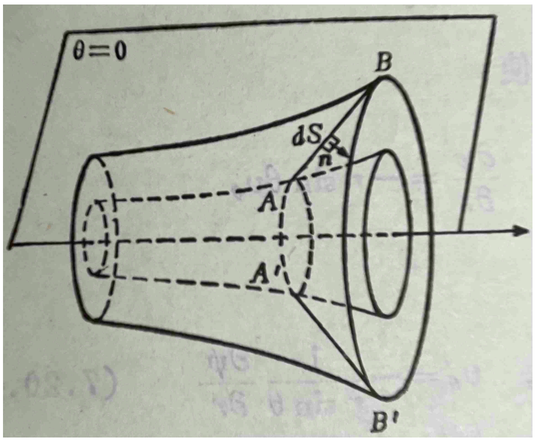


图 2: $u_\varphi = 0$ 时的流函数，摘自 [流体力学. 吴望一]。

此时流函数的物理意义如图2：其中点 $A$ 与点 $B$ 的 $\varphi$ 坐标相同，点 $A'$ 与点 $B'$ 的 $\varphi$ 坐标相同。[流体力学. 吴望一] 还假设 $A'B'$ 为 $AB$ 旋转得到，即点 $A$ 与点 $A'$ 的 $\rho, z$ 坐标相同，点 $B$ 与点 $B'$ 的 $\rho, z$ 坐标相同。但其实无必要，$\alpha|_A = \alpha|_{A'}$，$\alpha|_B = \alpha|_{B'}$ 即可。记 $Q$ 为四边曲面 $ABA'B'$ 上的速度通量积分，由式(71)，

$$Q = \int_{ABA'B'} \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = (\alpha|_B - \alpha|_A)(\varphi|_A - \varphi|_{A'}).$$

同理 $u_\rho$，$u_r$，$u_\theta$ 中某分量处处为 0 时也可以按类似方式得到对应的流函数。

现在可以参悟到流函数的奥秘了：矢量场本需要三个标量场描述，速度场某分量处处为 0，就可以简单地得到一个流面，且只需要两个标量场描述。无散又是对矢量场的一个约束，剩下的两标量场相互不独立，最后只需要一个标量场（流函数）就能描述这个矢量场。

# 4 速度势与流函数的关系

## 4.1 Laplace 方程

若二维笛卡尔直角坐标系下速度场无旋无散，可以得到

$$u_x = \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{78}$$

$$u_y = \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{79}$$

此时 $\psi$，$\chi$ 都满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{81}$$

[基矢量与张量] 中还给出

$$\nabla^2\vec{u} = \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{u}), \tag{82}$$

所以无旋无散的速度场也满足 Laplace 方程。

## 4.2 等值线相互垂直

在 $\chi(x1,\,y1)=\chi|_A$，$\psi(x2,\,y2)=\psi|_A$ 两条曲线上求全微分，得到

$$\left.\begin{aligned} u_x\,\mathrm{d}x1 + u_y\,\mathrm{d}y1 = 0,\\ -u_y\,\mathrm{d}x2 + u_x\,\mathrm{d}y2 = 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\mathrm{d}x1,\,\mathrm{d}y1)\cdot(\mathrm{d}x2,\,\mathrm{d}y2)=0.$$

所以速度势的等势线与流线处处垂直。

## 4.3 Green 函数

### 4.3.1 二维 Dirac 函数

二维 Dirac 函数，可以看成是两个方向的一维 Dirac 函数相乘

$$\delta^2(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y) = \lim_{a\to 0}\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\,a^2}, & |\vec{r}|\le a\\ 0, & |\vec{r}|>a \end{cases} \tag{83}$$

满足关系

$$\int_S F(\vec{r})\,\delta^2(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} F(\vec{r}_0), & \vec{r}_0\in S\\ 0, & \vec{r}_0\notin S \end{cases} \tag{84}$$

### 4.3.2 点源、点涡

若二维流场

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\,\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^2}, \tag{85}$$

其中 $\vec{r}=(x,\,y)$，$\vec{r}=(x_q,\,y_q)$。对应的速度势、流函数为

$$\chi(\vec{r}) = \frac{Q}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r}-\vec{r}_q|\Big), \tag{86}$$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{Q}{2\,\pi}\arctan\left(\frac{y-y_q}{x-x_q}\right). \tag{87}$$

记圆面 $|\vec{r}-\vec{r_q}|\le b$ 为 $\odot$，在其边界 $\partial\odot$ 即 $|\vec{r}-\vec{r_q}|=b$ 上进行速度通量积分，

$$\oint_{\partial\odot}\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi}\frac{b}{b^2}\,b\,\mathrm{d}\varphi=Q. \tag{88}$$

所以 $Q$ 为向外的速度通量。使用二维高斯定理(26)

$$\int_{\odot}\nabla\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}S=Q. \tag{89}$$

容易验证 $\vec{r}\neq\vec{r_q}$ 时，$\nabla\cdot\vec{u}=0$。上式面积分的贡献只能源于 $\vec{r}=\vec{r_q}$ 这一点，所以称满足式(85)的速度场为点源。比较式(84)可知

$$\nabla\cdot\vec{u}=Q\,\delta^2(\vec{r}-\vec{r_q}). \tag{90}$$

在点 $\vec{r_q}$ 处不满足无散条件，其流函数(87)在这里多值。

类似的，点涡的流场为

$$\vec{u}(\vec{r})=\frac{\Omega}{2\pi}\frac{\vec{e_z}\times(\vec{r}-\vec{r_\omega})}{|\vec{r}-\vec{r_\omega}|^2}. \tag{91}$$

其中 $\Omega$ 为逆时针绕点 $\vec{r_\omega}$ 的速度环量。对应的速度势、流函数为

$$\chi(\vec{r})=\frac{\Omega}{2\pi}\arctan\left(\frac{y-y_\omega}{x-x_\omega}\right), \tag{92}$$

$$\psi(\vec{r})=-\frac{\Omega}{2\pi}\ln\Big(|\vec{r}-\vec{r_\omega}|\Big). \tag{93}$$

并有

$$\nabla\times\vec{u}=\Omega\,\delta^2(\vec{r}-\vec{r_\omega})\,\vec{e_z} \tag{94}$$

在点 $\vec{r_\omega}$ 处不满足无旋条件，点涡的速度势(92)在这里多值。

#### 4.3.3 由边值关系求解速度势、流函数

Green 第二公式二维退化(29)中，取 $u=\chi(\vec{r})$, $v=G(\vec{r})$，得

$$\int_S\chi\,\nabla^2G\,\mathrm{d}S=\int_S G\,\nabla^2\chi\,\mathrm{d}S+\oint_{\partial S}(\chi\,\nabla G-G\,\nabla\chi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l \tag{95}$$

设 $\vec{r_0}=(x_0,\,y_0)\in S$，若在 $S$ 内满足

$$\nabla^2G(\vec{r})=\delta^2(\vec{r}-\vec{r_0}) \tag{96}$$

称满足式(96)的 $G(\vec{r})$ 为 Green 函数。就有

$$\chi(\vec{r_0}) = \int_S G\,\nabla^2\chi\,\mathrm{d}S + \oint_{\partial S}\chi\,\vec{n}\cdot\nabla G\,\mathrm{d}l - \oint_{\partial S} G\,\vec{n}\cdot\nabla\chi\,\mathrm{d}l \tag{97}$$

由式(96)，

$$\nabla G(\vec{r}) = \frac{1}{2\,\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r_0}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^2} + \nabla f(\vec{r}), \tag{98}$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r}-\vec{r_0}|\Big) + f(\vec{r}). \tag{99}$$

其中在 $S$ 内要满足 $\nabla^2 f(\vec{r})=0$，在 $S$ 外 $f(\vec{r})$ 可随意构造。比如可取

$$f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r}-\vec{r_i}|\Big),\ \vec{r_i}\notin S \tag{100}$$

对于式(95)的绿色项，以下两种情形可以舍去：

(a) 若 $S$ 为单连通区域，那么 $\partial S$ 为一条连续的曲线。若边界上切向速度为 0，有 $\chi|_{\partial S}=\chi_0$ 为常数。由二维 Gauss 定理(26)，绿色项即为 $\chi_0$。$\chi_0$ 的取值不影响速度场的值，规范 $\chi|_{\partial S}=0$。

(b) 构造 $f(\vec{r})$，使得 $\vec{n}\cdot\nabla G(\vec{r})|_{\partial S}=0$。比如 $S$ 为 $y\geq 0$ 的区间，$\partial S$ 即为 $y=0$，取

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \frac{1}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r}-\vec{r_{0*}}|\Big), \quad \text{其中} \quad \vec{r_{0*}}=(x_0,\,-y_0)\\ &= \frac{1}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r_*}-\vec{r_0}|\Big), \quad \text{其中} \quad \vec{r_*}=(x,\,-y) \end{aligned} \tag{101}$$

对于式(95)的蓝色项，以下两种情形可以舍去：

(a) 若边界上法向速度为 0，有 $\vec{n}\cdot\nabla\chi|_{\partial S}=0$。

(b) 构造 $f(\vec{r})$，使得 $G(\vec{r})|_{\partial S}=0$。比如 $S$ 为 $y\geq 0$ 的区间，$\partial S$ 即为 $y=0$，取

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= -\frac{1}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r}-\vec{r_{0*}}|\Big), \quad \text{其中} \quad \vec{r_{0*}}=(x_0,\,-y_0)\\ &= -\frac{1}{2\,\pi}\ln\Big(|\vec{r_*}-\vec{r_0}|\Big), \quad \text{其中} \quad \vec{r_*}=(x,\,-y) \end{aligned} \tag{102}$$

对于式(95)的红色项，满足 Laplace 方程(80)时可舍去。若 $\nabla^2\chi=\sum_i Q_i\,\delta^2(\vec{r_{q_i}})$，$\vec{r_{q_i}}\in S$，由式(86)知，$S$ 内部有点源，此项就为

$$\int_S G(\vec{r})\sum_i Q_i\,\delta^2(\vec{r_{q_i}})\,\mathrm{d}S = \sum_i G(\vec{r_{q_i}})\,Q_i \tag{103}$$

特别的，若 $S$ 为全空间，只能让 $f(\vec{r})=0$。式(95)的红色项即为

$$\sum_i \frac{Q_i}{2\,\pi}\ln\left(|\vec{r_{q_i}}-\vec{r_0}|\right). \tag{104}$$

若 $\lim\limits_{\vec{r}\to\infty}\chi=0$，式(95)的边界积分于无穷远处亦趋于 0，就回到了叠加的点源本身的速度势。

由 Green 第一公式(22)可以证明电动力学里的唯一性定理，所以可以用镜像法凑边界条件求解静电场、静磁场。而镜像法其实就是 $\psi$ 的边界条件已经让式(95)的一个边界积分项为 0，再构造让另一个边界积分项为 0 的 Green 函数，最终只要处理式(95)右边的区域积分项 (红色项)。

三维情形见 [Green 公式与 Green 函数]，本节参考了那里的做法，应用到二维情形。对于更复杂形状的边界，[Green 函数的构造] 列举了各种有效的方法，处理方式降为二维即可应用于速度势、流函数的求解。

对于流函数做法类似，只需要注意这几点区别：

(a) 取 $\psi|_{\partial S}=0$ 对应边界上法向速度为 0。

(b) $\vec{n}\cdot\nabla\psi|_{\partial S}=0$ 对应边界上切向速度为 0。

(c) 由式(93)知，若 $\nabla^2\psi=-\Omega\,\delta^2(\vec{r_\omega})$，为点涡。

### 4.3.4 调和函数

若 $S$ 为圆面 $|\vec{r}-\vec{r_0}|\le a$。取 $f(\vec{r})=-\ln(a)/(2\,\pi)$，在边界 $\partial S$ 即 $|\vec{r}-\vec{r_0}|=a$ 上，$G=0$，式(95)的蓝色项可舍去。当 $\chi$ 满足 Laplace 方程，式(95)的红色项也可舍去，式(95)变成

$$\chi(\vec{r_0})=\oint_{\partial S}\frac{\chi(\vec{r})}{2\,\pi\,a}\,\mathrm{d}l \tag{105}$$

故称满足 Laplace 方程的函数为调和函数，**调和**即指任意一点上的函数值可以表达为以这点为圆心（三维为球心）任意半径的圆环（三维为球面）上的函数值的平均。再以上式的 $a$ 为变量求积分，易知调和函数任意一点上的函数值也为以这点为圆心（三维为球心）任意半径的圆面（三维为球体）上的函数值的平均。

## 4.4 复势

式(78)(79)满足复变函数里的 Cauchy-Riemann 方程，可以构造解析函数，即复势

$$w(z)=\chi+\mathrm{i}\,\psi, \tag{106}$$

其中 $z=x+\mathrm{i}\,y$。求导即为复速度

$$\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}=u_x-\mathrm{i}\,u_y \tag{107}$$

特别提一下点源，由其速度势(86)、流函数(87)得其复势

$$w(z) = \frac{Q}{2\,\pi}\ln(z - z_q), \tag{108}$$

其中 $z_q = x_q + \mathrm{i}\,y_q$。注意点源的复势为多值函数，本应取条从 $z_q$ 到无穷的割线将空间变成单连通区域以避免多值。但复势不是物理量，是为确定速度定义出的函数，其导数复速度单值即可。

类似的，点涡的复势为

$$w(z) = -\frac{\mathrm{i}\,\Omega}{2\,\pi}\ln(z - z_\omega). \tag{109}$$

# 参考材料


[基矢量与张量] https://github.com/el2718/thoughts/releases/tag/thoughts

[流体力学. 吴望一]《流体力学（下册）》吴望一，1983，北京大学出版社

[Green 公式与 Green 函数] http://math.okstate.edu/people/binegar/4263/4263-l17.pdf

[Green 函数的构造] https://www.zhihu.com/column/c_1470853098301886464

[球坐标的 Green 函数] https://zhuanlan.zhihu.com/p/463911832