基矢量与张量

陈俊

chenjun@pmo.ac.cn

更新时间：2024 年 11 月 18 日

前言

本文最早成型于 2013 年 USTC 春季学期任《电动力学》助教时，在 2014 年秋季学期任《流体力学》助教时有所完善，与 [速度势、流函数细谈] 互为补充。2023 年 NJU 春季学期负责《太阳活动区物理》的磁场一节，为做数学铺垫，将需要证明的部分全部说清，内在的逻辑关联也更强了。这里强调了基矢量，正是因为基矢量，张量的下标法表达才有了依据。

实际应用中碰到的张量的基矢量一般是正交归一的，为方便理解，下面有意回避了非标准正交基。如有深入的兴趣，参考 [张量分析]。[矢量分析] 对矢量有基础详细的介绍。[NRL Plasma Formulary] 总结好了主要的矢量张量公式可供查阅。

1 数学准备

1.1 爱因斯坦求和约定

$\sum_i a_i\, B_{ij}$ 简记为 $a_i\, B_{ij}$。其中 i 为哑标 (dummy index)，不能作为变量，要对所有维度求和，故其记号选取是任意的，将 i 换成 k 也表达相同意义。而 j 为自由标 (free index)，表征第 j 分量。

例如 3 维下 $a_i\, B_{ij} = a_1\, B_{1j} + a_2\, B_{2j} + a_3\, B_{3j}$。

一旦在一乘积式中发现两相同下标，即为哑标，需要求和。张量里出现的相同下标，要么是缩并产生，要么是基矢与分量配对，必然成对出现。所以同一乘积式中不能出现 2 个以上相同下标，更不能通过变换变出 2 个以上相同下标，不然含义不明。

1.2 Kronecker 符号

定义 Kronecker 符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

有性质（代入、哑标求和即可验证）

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \tag{2}$$

$$\delta_{ij}\, a_j = a_i. \tag{3}$$

1.3 基矢量

一般标记基矢量习惯用字母 e，源自 elementary。

空间中任意矢量都可以表示为一组完备且线性无关的基矢量 $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ 的线性组合

$$\overrightarrow{a} = a_i\,\overrightarrow{e_i}. \tag{4}$$

完备即指任意矢量都满足上式；线性无关指任一基矢量不能表达为同组中其它基矢量的线性组合。其中 n 为基矢量的数目，即空间的维次，也是一个矢量分量系数下标可变的范围。常用的空间为 3 维，平面空间为 2 维，狭义相对论里加上时间一维为 4 维，爱因斯坦求和约定要对所有维度求和。

基矢量可以不一样长，相互间可以不正交。但那样讨论张量需要引入协变基、逆变基、度规张量。为方便理解，叙述简洁，本文用到的基矢量都是正交归一的，即若满足

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}, \tag{5}$$

就可以称 $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ 为标准正交基。注意标准正交基是无量纲的，矢量的单位由分量系数携带。

那么矢量间的点乘运算就可以表达为

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (a_i\,\overrightarrow{e_i}) \cdot (b_j\,\overrightarrow{e_j}) = a_i\,b_j\,\delta_{ij} = a_i\,b_i. \tag{6}$$

对于三维空间，叉乘运算 $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ 的方向通过右手定则给出。所以 $(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{e_3}$ 的符号决定了坐标系的手性，正对应右手系，负对应左手系。交换叉乘顺序会掉转结果的方向，故交换基矢的下标顺序会改变坐标系的手性。

1.4 置换符号

三阶置换符号（也称为 Levi-Civita 符号）

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i, j, k \text{ 中有两个以上指标相同} \\ 1, & i, j, k \text{ 偶排列（123，231，312）} \\ -1, & i, j, k \text{ 奇排列（132，321，213）} \end{cases} \tag{7}$$

交换它的任意两下标变号，交换两次就回归同号，即

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \tag{8}$$

在基矢 $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ 正交归一且顺序组成右手系的情况下

$$\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j} = \varepsilon_{ijl}\,\overrightarrow{e_l}, \tag{9}$$

$$(\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j}) \cdot \overrightarrow{e_k} = \varepsilon_{ijl}\,\overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_k} = \varepsilon_{ijl}\,\delta_{lk} = \varepsilon_{ijk}, \tag{10}$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = a_i\,b_j\,(\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j}) = a_i\,b_j\,\varepsilon_{ijk}\,\overrightarrow{e_k}, \tag{11}$$

上述各式在左手系下会多一个负号。

对于式(11)，若 $\vec{a}=\vec{b}$，第 k 分量为

$$a_i\,a_j\,\varepsilon_{ijk}=\frac{1}{2}\,(a_i\,a_j\,\varepsilon_{ijk}+a_j\,a_i\,\varepsilon_{jik})=\frac{1}{2}\,a_i\,a_j\,(\,\varepsilon_{ijk}+\varepsilon_{jik})=0, \tag{12}$$

与同向矢量叉乘为 $\vec{0}$ 的结论一致。

注意 ε_{ijk} 只是三阶置换符号，别的阶次置换符号也是由奇偶排列定义，下标个数不一样罢了。置换符号还可以用来求行列式。比如若 A 为 3×3 的矩阵，其行列式

$$\det(A)=A_{1i}\,A_{2j}\,A_{3k}\,\varepsilon_{ijk}=A_{i1}\,A_{j2}\,A_{k3}\,\varepsilon_{ijk} \tag{13}$$

对 $n\times n$ 的矩阵也可以用 n 阶置换符号仿照式(13)求行列式。

1.4.1 与 Kronecker 符号的关系

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ 的第 i 分量为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\,a_j\,(\varepsilon_{klm}\,b_l\,c_m)&=a_j\,c_j\,b_i-a_j\,b_j\,c_i\\(\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm})\,(a_j\,b_l\,c_m)&=(\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\,\delta_{jl})\,(a_j\,b_l\,c_m),\end{aligned} \tag{14}$$

其中式(14)右边用到了式(3)。所以两符号间有关系：

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\,\delta_{jl}, \tag{15}$$

分量遍历总共就 81 种情况，还可以编程 [epsilon_delta.f90] 重新暴力验证上式的正确性。

2 张量运算

2.1 张量的并

一个张量是一组张量基的线性组合。而张量基由基矢量的并构成。比如二阶张量可以写成

$$\overset{\rightrightarrows}{A}=A_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}. \tag{16}$$

其中 A_{ij} 为线性组合的系数，称为张量分量系数；$\vec{e_i}\,\vec{e_j}$ 为基矢量 $\vec{e_i}$, $\vec{e_j}$ 的并构成的张量基。并运算一般不满足交换律，如 $\vec{e_1}\,\vec{e_2}\neq\vec{e_2}\,\vec{e_1}$。

并的基矢量的数目是张量基的阶次。若一个基矢在张量基中从左到右为第 s 个出现，则称该基矢为第 s 阶基矢。不同张量基的同一阶基矢对应的空间维度是不同，每一阶都会遍历所有维度。如式(16)中的 $\vec{e_j}$ 为第 2 阶基矢，随着 j 的变化会遍历所有基矢量。

对于 n 维空间上的 p 阶张量，基矢量通过不同顺序的并构成了 n^p 个完备且线性无关的 p 阶张量基。对应就有 n^p 个张量的分量系数，对分量系数没有约束时有 n^p 个自由度。自由矢量为 1 阶张量，有 n 个自由度。自由标量为 0 阶张量，有 1 个自由度。当然还有更高阶的张量。

除了哈密顿算符，本文中字符上面的箭头数表明了对应的是几阶张量。

两个矢量 $\vec{a} = a_i\,\vec{e_i}$, $\vec{b} = b_j\,\vec{e_j}$ 间有几种乘法运算：点乘 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，叉乘 $\vec{a}\times\vec{b}$(限三维空间)，并矢

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_i\,b_j\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}. \tag{17}$$

对于并矢构成的二阶张量，其自由度为原来两个矢量自由度的和，若两个矢量都没有别的约束，它们的并矢有 $2\,n$ 个自由度，而非 n^2 个。这里对得到的二阶张量 i, j 分量系数的约束是：必须表达为 $a_i\,b_j$ 的形式。

多个张量并运算还会出现更高阶的张量，如可这样构造 6 阶张量：

$$\vec{\vec{\vec{Q}}}\,\vec{a}\,\vec{\vec{W}} = (Q_{ijk}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k})\,(a_l\,\vec{e_l})\,(W_{mn}\,\vec{e_m}\,\vec{e_n}) = Q_{ijk}\,a_l\,W_{mn}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k}\,\vec{e_l}\,\vec{e_m}\,\vec{e_n},$$

其第 i, j, k, l, m, n 分量系数为 $Q_{ijk}\,a_l\,W_{mn}$，若原来各个张量系数都是自由的，并后得到的张量的自由度有 n^3+n+n^2 个。

2.2 转置

转置就是交换张量基中两基矢量的位置，且所有张量基都要按此方式交换。记 ${}^{T_{rs}}$ 为对张量第 r 阶与第 s 阶的转置操作，那 $(Q_{ijk}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k})^{T_{13}} = Q_{ijk}\,\vec{e_k}\,\vec{e_j}\,\vec{e_i}$ ，由哑标选取的任意性，又有：$Q_{ijk}\,\vec{e_k}\,\vec{e_j}\,\vec{e_i} = Q_{kji}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k}$。故交换基矢下标和交换分量系数下标是等价的转置操作。

对于二阶张量，${}^{T_{12}}$ 可直接写成 ^{T}。如果 $\vec{\vec{S}} = (\vec{\vec{S}})^T$，称 $\vec{\vec{S}}$ 为对称张量。比如相同矢量的并矢 $\vec{a}\,\vec{a} = a_i\,a_j\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}$ 为对称张量。如果 $\vec{\vec{C}} = -(\vec{\vec{C}})^T$，称 $\vec{\vec{C}}$ 为反对称张量。对于任意二阶张量 $\vec{\vec{B}}$，一定可以将其分解成对称部分 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{\vec{B}}+(\vec{\vec{B}})^T\right)$ 和反对称部分 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{\vec{B}}-(\vec{\vec{B}})^T\right)$。

2.3 缩并

缩并源自于配对的基矢量的点积。如张量 $\vec{\vec{A}} = A_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}$ 与 $\vec{\vec{B}} = B_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}$ 的一次临近基矢缩并

$$\begin{aligned}\vec{\vec{A}}\cdot\vec{\vec{B}} &= (A_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j})\cdot(B_{km}\,\vec{e_k}\,\vec{e_m})\\ &= A_{ij}\,B_{km}\,\delta_{jk}\,\vec{e_i}\,\vec{e_m}\\ &= A_{ij}\,B_{jm}\,\vec{e_i}\,\vec{e_m},\end{aligned} \tag{18}$$

即并运算得到 4 阶张量后，衔接的各基矢对做点积 $\vec{e_j}\cdot\vec{e_k} = \delta_{jk}$，然后哑标求和，变回 2 阶张量，是为缩并。

注意张量不是矩阵，只是二阶张量的分量可以表示成矩阵的形式，两个二阶张量的临近阶缩并恰好可以用矩阵乘法表示。如矩阵乘法 $A\,B$ 的第 i, m 分量恰为 $A_{ij}\,B_{jm}$，与式(18)的分量系数一致。

2.3.1 缩并的阶配对方式

习惯上对并乘后衔接的两基矢进行点积，即前一张量的最后一阶基矢与后一张量的第一阶基矢点积。也可以自定义点积中配对的阶，比如 $\vec{\vec{\vec{E}}}$ 的第 2 阶与 $\vec{\vec{\vec{\vec{F}}}}$ 的第 3 阶缩并为 $E_{ijk}\,F_{lmjn}\,\vec{e_i}\,\vec{e_k}\,\vec{e_l}\,\vec{e_m}\,\vec{e_n}$。

l 阶张量与 k 阶张量 n 次缩并后为 $l+k-2\,n$ 阶张量，比它们并乘得到的张量低 $2\,n$ 阶，其中每一次缩并都要规定是对哪两个阶的。有这样一些特殊的缩并：

- 串联点积：相邻的阶先点积，如此反复。如 $\vec{\vec{A}}\cdot\cdot\vec{\vec{B}} = A_{ij}\,B_{ji}$，$\vec{\vec{\vec{E}}}\cdot\cdot\cdot\vec{\vec{\vec{\vec{F}}}} = E_{ijk}\,F_{kjil}\,\vec{e_l}$

- 并联点积：距离为缩并次数的阶配对点积。如 $\overset{\rightrightarrows}{A} : \overset{\rightrightarrows}{B} = A_{ij}\, B_{ij}$, $\overset{\rightrightarrows\rightrightarrows}{H} \vdots \overset{\rightrightarrows\rightrightarrows}{F} = H_{lijk}\, F_{ijkm}\, \vec{e_l}\, \vec{e_m}$
- $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 的自缩并为 A_{ii}，也就是求迹。
- $\vec{a}$ 在单位长度矢量 $\vec{b}$ 上的投影矢量可以写为 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b}\, \vec{b}) = (\vec{b}\, \vec{b}) \cdot \vec{a}$。

可以看到

$$\overset{\rightrightarrows}{A} \cdot\cdot \overset{\rightrightarrows}{B} = (\overset{\rightrightarrows}{A})^T : \overset{\rightrightarrows}{B}, \tag{19}$$

$$\overset{\rightrightarrows}{A} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\overset{\rightrightarrows}{A})^T. \tag{20}$$

故若 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 是二阶对称张量，它与任意二及以上阶的张量的二次串联缩并和二次并联缩并是等价的，与任意矢量的左右点积都是等价的；若 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 是二阶反对称张量，这样的两对结果会各自互为相反数。

2.4　例：转动惯量张量

可能是很多人碰到的第一个张量实例。角动量

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times (\varrho\, \vec{u})\, dV = \int_V \varrho\, \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dV = \int_V \varrho\, (\vec{\omega}\, (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\, (\vec{\omega} \cdot \vec{r}))\, dV,$$

其第 i 分量为

$$L_i = \int_V \varrho\, (\omega_i\, r_j\, r_j - r_i\, \omega_k\, r_k)\, dV = \omega_k \int_V \varrho\, (\delta_{ik}\, r_j\, r_j - r_i\, r_k)\, dV.$$

$$\text{定义}\quad M_{ik} = \int_V \varrho\, (\delta_{ik}\, r_j\, r_j - r_i\, r_k)\, dV, \tag{21}$$

$$\text{那么}\quad \overset{\rightrightarrows}{M} = M_{ik}\, \vec{e_i}\, \vec{e_k} = \int_V \varrho\, (r^2\, \overset{\rightrightarrows}{I} - \vec{r}\, \vec{r})\, dV \tag{22}$$

是转动惯量张量，其中 $\overset{\rightrightarrows}{I}$ 会在3.3节定义。交换式(21)右边的 i, k，并未改变 M_{ik}，故 $\overset{\rightrightarrows}{M}$ 是对称张量。最后，角动量

$$\vec{L} = \overset{\rightrightarrows}{M} \cdot \vec{\omega}. \tag{23}$$

3　不同基矢下的张量表达

3.1　方向余弦矩阵

设有两组标准正交基，$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$，$\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$。记

$$D_{mi} = \vec{g_m} \cdot \vec{e_i} \tag{24}$$

是方向余弦矩阵 D (direction cosine matrix) 的 m, i 分量。将 $\vec{g_m}$ 在 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ 下表示就有

$$\vec{g_m} = D_{mi}\, \vec{e_i}. \tag{25}$$

同理，将 $\vec{e_j}$ 在 $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ 下表示就有

$$\vec{e_j} = D_{mj}\,\vec{g_m} = D_{mj}\,D_{mi}\,\vec{e_i},$$

对比式(3), 可知 $D_{mi}\,D_{mj} = \delta_{ij}$。再对前一项转置就有 $D^T_{im}\,D_{mj} = \delta_{ij}$，即对方向余弦矩阵有

$$D^T = D^{-1}. \tag{26}$$

3.2 张量分量系数的变换

简单地有 $\vec{\vec{A}} = A_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j} = A_{ij}\,(D_{ki}\,\vec{g_k})\,(D_{mj}\,\vec{g_m}) = D_{ki}\,D_{mj}\,A_{ij}\,\vec{g_k}\,\vec{g_m}$，其中

$$\begin{aligned} A'_{km} &= D_{ki}\,D_{mj}\,A_{ij} && (27)\\ &= D_{ki}\,A_{ij}\,{D^T}_{jm} \\ &= (D\,A\,D^T)_{km}. && (28) \end{aligned}$$

就是在 $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ 下分量系数。式(27)还可以得到二阶张量分量系数的对称性和反对称性不随基矢改变，若 $A_{ij} = A_{ji}$，则 $A'_{km} = A'_{mk}$；同理若 $A_{ij} = -A_{ji}$，则 $A'_{km} = -A'_{mk}$。

所以张量分量的数值会随基矢的改变而改变。同上面的做法，对任意矢量 $\vec{u} = u_i\,\vec{e_i} = u'_k\,\vec{g_k}$，有

$$u'_k = D_{ki}\,u_i. \tag{29}$$

对三阶张量 $\vec{\vec{\vec{E}}} = E_{ijk}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k} = E'_{rst}\,\vec{g_r}\,\vec{g_s}\,\vec{g_t}$，也有 $E'_{rst} = D_{ri}\,D_{sj}\,D_{tk}\,E_{ijk}$，更高阶的类似。而标量是 0 阶张量，没有基矢，其分量系数也就是标量本身不随坐标系的改变而改变。

回想电动力学里的狭义相对论，对于四维时空坐标，洛伦茨变换就对应这里的基矢变换。换一个参考系，会改变时间空间的基矢，就需要对相应张量（如 4 维的电流密度矢量、4 维的电磁矢势，电磁场张量）的分量系数做一次洛伦茨变换，也就是协变性。但那里用了 Minkowski 度规，不是标准正交基，本文不展开讨论。

3.3 Kronecker 张量

定义 Kronecker 张量为

$$\vec{\vec{I}} = \delta_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j} = \vec{e_i}\,\vec{e_i}. \tag{30}$$

对应的矩阵为单位阵

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

注意到 $\vec{\vec{I}} = (D_{ji}\,\vec{g_j})\,(D_{ki}\,\vec{g_k}) = \delta_{jk}\,\vec{g_j}\,\vec{g_k} = \vec{g_j}\,\vec{g_j}$，所以 $\vec{\vec{I}}$ 在任意标准正交基下的分量系数都是一样的，即为各向同性张量。同时 $\vec{\vec{I}}$ 也是对称张量。

与式(3)一致，对于任意矢量 $\vec{c}$，

$$\vec{\vec{I}} \cdot \vec{c} = \vec{e_i}\, \delta_{ik}\, c_k = \vec{c}, \tag{32}$$

即 $\vec{\vec{I}}$ 与任何张量 (包括任意更高阶) 一次缩并（无论是左右缩并）都不改变该张量，相当于缩并运算里的单位 1。

对任意二阶张量 $\vec{\vec{A}}$ 求迹，即自缩并可以表示为

$$A_{ii} = A_{ij}\, \delta_{ij} = \vec{\vec{A}} : \vec{\vec{I}}. \tag{33}$$

3.4 Levi-Civita 张量

设定 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ 是标准正交的右手系，定义 Levi-Civita 张量

$$\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e_i}\, \vec{e_j}\, \vec{e_k}, \tag{34}$$

在标准正交的 $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ 下，$\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} = \varepsilon'_{ijk}\, \vec{g_i}\, \vec{g_j}\, \vec{g_k}$，其分量

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{ijk} &= D_{il}\, D_{jm}\, D_{kn}\, \varepsilon_{lmn} \\
&= D_{il}\, D_{jm}\, D_{kn}\, (\vec{e_l} \times \vec{e_m}) \cdot \vec{e_n} \\
&= ((D_{il}\, \vec{e_l}) \times (D_{jm}\, \vec{e_m})) \cdot (D_{kn}\, \vec{e_n}) \\
&= (\vec{g_i} \times \vec{g_j}) \cdot \vec{g_k} \\
&= \pm\, \varepsilon_{ijk}.
\end{aligned}$$

$\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ 为右手系时上式取正号, 为左手系时上式取负号。一些地方会因为这样的符号改变称 $\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}}$ 是赝张量 (pseudotensor)。故在不改变基矢量手性的情况下，$\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}}$ 的分量数值不随基矢改变，也是各向同性张量。

对 $\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}}$ 的任意两阶转置符号改变，具有反对称性。若 $\vec{\vec{S}}$ 为对称张量，采用与式(12)相同的做法，容易证明

$$\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} : \vec{\vec{S}} = \vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \cdot\cdot \vec{\vec{S}} = \vec{0} \tag{35}$$

对于任意矢量 $\vec{a}$, 可以这样构造反对称二阶张量

$$\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \cdot \vec{a} = (-\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}})^{T_{12}} \cdot \vec{a} = -(\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \cdot \vec{a})^T \tag{36}$$

对比一下式(11)，借用 Levi-Civita 张量，叉乘运算还可以有这样一些形式

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} : (\vec{a}\, \vec{b}) = (\vec{a}\, \vec{b}) : \vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \\
&= -\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \cdot\cdot (\vec{a}\, \vec{b}) = -(\vec{a}\, \vec{b}) \cdot\cdot \vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \\
&= -(\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{\vec{\vec{\varepsilon}}} \cdot \vec{b}
\end{aligned} \tag{37}$$

式(11)已约定叉乘运算在不同手性的基矢下符号不同，上述的叉乘形式不随基矢手性而改变。

4 微分运算

4.1 笛卡尔直角坐标系

后面的柱坐标系、球坐标系基矢之间夹角也是直角，加上笛卡尔可以避免概念上混乱。笛卡尔直角坐标系下的坐标由 $\{x, y, z\}$ 记录。除此之外还有笛卡尔斜坐标系，基矢间不正交，不满足式(5)。

4.1.1 基矢量

某坐标的基矢量为位置矢量 $\vec{r}$ 随该坐标变化的方向，即有

$$\vec{e_x} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x},\ \vec{e_y} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y},\ \vec{e_z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}, \tag{38}$$

它们组成了笛卡尔直角坐标系的基矢量，且按此顺序组成了右手系的标准正交基，即满足式(5)和式(9)。

一个矢量可以表达为这些基矢量的线性组合

$$\vec{u} = u_x\,\vec{e_x} + u_y\,\vec{e_y} + u_z\,\vec{e_z} \tag{39}$$

$$= u_i\,\vec{e_i}. \tag{40}$$

其中位矢

$$\vec{r} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z} \tag{41}$$

$$= x_i\,\vec{e_i}. \tag{42}$$

注意式(40)适用于各种坐标系，标准正交基组成的坐标系间 u_i 的数值按式(29)变换到别的坐标系。而 x_i 只是笛卡尔直角坐标系的坐标，恰好可以作为位矢的线性组合系数。别的坐标系的线性组合系数可以不是这样孤立的一个坐标，式(42)的表达只适用于笛卡尔（直角和斜）坐标系。笛卡尔直角坐标系下，可以简记 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$，$\vec{r} = (x, y, z)$。

4.1.2 哈密顿算符

对标量场 $f(\vec{r})$ 求全微分有

$$\mathrm{d}f(\vec{r}) = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = (\vec{e_i}\,\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i}) \cdot (\vec{e_j}\,\mathrm{d}x_j). \tag{43}$$

其中位矢的微分

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e_j}\,\mathrm{d}x_j = \vec{e_x}\,\mathrm{d}x + \vec{e_y}\,\mathrm{d}y + \vec{e_z}\,\mathrm{d}z, \tag{44}$$

再定义哈密顿算符

$$\nabla = \vec{e_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{e_x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{45}$$

那式(43)就可以写为

$$\mathrm{d}f(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{46}$$

积分形式为

$$f(\vec{r_2}) - f(\vec{r_1}) = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \nabla f(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{47}$$

其中 $\nabla f(\vec{r})$ 称为 $f(\vec{r})$ 的梯度，表征 $f(\vec{r})$ 的数值随位置的变化率和变化的方向。

对坐标函数求梯度，也可以得到坐标变化的方向

$$\nabla x_i = \frac{\partial\, x_i}{\partial x_j}\,\vec{e_j} = \delta_{ji}\,\vec{e_j} = \vec{e_i}. \tag{48}$$

式(46)的 f 若是坐标，即

$$\mathrm{d}x_i = \nabla x_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{49}$$

式(44)(48)带入式(49)验证，左右正好相等。

哈密顿算符既有矢量性，又有微分性，是对张量场（包括 0 阶的标量场和 1 阶的矢量场）的求导运算。为书写简洁，本文之后的张量函数都不出现自变量空间坐标，只要出现对坐标的求导都默认作用在一个场上。

4.1.3 梯度、散度、旋度、拉普拉斯算符

这里简记 $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{ij}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}$。对于笛卡尔直角坐标系，基矢不随坐标变化，即 $\partial_i\,\vec{e_j} = \vec{0}$。对于 $\partial_i\,\vec{e_j} \neq \vec{0}$ 的坐标系，需要考虑对基矢的导数项。

如前一节所述，一个标量场 f 的梯度由 ∇f 表达，比较简单，之后都不再赘述。

矢量场 $\vec{u}$ 的

梯度
$$\nabla\vec{u} = (\vec{e_i}\,\partial_i)\,(u_j\,\vec{e_j}) = (\partial_i\,u_j)\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}, \tag{50}$$

散度
$$\nabla\cdot\vec{u} = (\vec{e_i}\,\partial_i)\cdot(u_j\,\vec{e_j}) = \partial_i\,u_i, \tag{51}$$

旋度
$$\nabla\times\vec{u} = (\partial_i\,u_j)\,\varepsilon_{ijk}\,\vec{e_k}. \tag{52}$$

比如对于位矢场 $\vec{r}$，将式(42)带入式(50)(51)(52)得到

$$\nabla\vec{r} = (\partial_i\,x_j)\,\vec{e_i}\,\vec{e_j} = \delta_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j} = \overset{\rightrightarrows}{I}, \tag{53}$$

$$\nabla\cdot\vec{r} = \partial_i\,x_i = \delta_{ii} = 3, \tag{54}$$

$$\nabla\times\vec{r} = (\partial_i\,x_j)\,\varepsilon_{ijk}\,\vec{e_k} = \delta_{ij}\,\varepsilon_{ijk}\,\vec{e_k} = \varepsilon_{iik}\,\vec{e_k} = \vec{0}. \tag{55}$$

式(51)恰为式(50)的迹，由式(33)，散度可以写成这种形式

$$\nabla\cdot\vec{u} = (\nabla\vec{u}) : \overset{\rightrightarrows}{I}. \tag{56}$$

类比式(37)，旋度可以写成这种形式

$$\nabla\times\vec{u} = (\nabla\vec{u}) : \overset{\rightrightarrows}{\varepsilon}. \tag{57}$$

故求梯度也是一种并运算，结果提高一阶；求散度是缩并运算，结果降低一阶；求旋度不改变阶次。

拉普拉斯算符就是梯度的散度，

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = (\vec{e_i}\,\partial_i)\cdot(\vec{e_j}\,\partial_j) = \partial_{ii}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{58}$$

散度的梯度

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \vec{e_j}\,\partial_j(\partial_i\,u_i) = (\partial_{ij}\,u_i)\,\vec{e_j} \tag{59}$$

旋度的旋度

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) &= (\vec{e_i}\,\partial_i)\times((\partial_k\,u_l)\,\varepsilon_{jkl}\,\vec{e_j})\\ &= \partial_i(\partial_k\,u_l)\,\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{ijm}\,\vec{e_m}\\ &= (\partial^2_{ik}\,u_l)\,(\delta_{km}\,\delta_{li}-\delta_{ki}\,\delta_{lm})\,\vec{e_m}\\ &= (\partial^2_{im}\,u_i-\partial^2_{ii}\,u_m)\,\vec{e_m}\\ &= \nabla(\nabla\cdot\vec{u})-\nabla^2\vec{u}\end{aligned} \tag{60}$$

与式(12)及式(35)相同的原因（$\nabla\nabla$ 可以看成是对称二阶张量），梯度的旋度

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla f &= (\vec{e_i}\,\partial_i)\times(\vec{e_j}\,\partial_j)\,f\\ (\nabla\nabla f):\overset{\Rrightarrow}{\varepsilon} &= \vec{e_k}\,\varepsilon_{ijk}\,\partial^2_{ij}\,f\\ &= \vec{0}\end{aligned} \tag{61}$$

以及旋度的散度

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u}) &= (\vec{e_i}\,\partial_i)\cdot((\partial_j\,u_k)\,\varepsilon_{mjk}\,\vec{e_m})\\ \overset{\Rrightarrow}{\varepsilon}\,\vdots\,(\nabla\nabla\vec{u}) &= \varepsilon_{ijk}\,\partial^2_{ij}\,u_k\\ &= 0\end{aligned} \tag{62}$$

本节只是形式证明了上述两式，在 [速度势、流函数细谈] 中通过 Poincaré 引理讨论了更深的原因。[速度势、流函数细谈] 通过 Guass-Stokes 公式对梯度、散度、旋度的物理意义也会有更基础的理解。

4.1.4 例：安培力

磁流体力学中的安培力为 $\dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}$，忽略常系数

$$\begin{aligned}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} &= ((\partial_i\,B_j)\,\varepsilon_{ijk}\,B_l)\,\varepsilon_{klm}\,\vec{e_m}\\ &= (\partial_i\,B_j)\,B_l\,(\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\,\delta_{jl})\,\vec{e_m}\\ &= (\partial_i\,B_m)\,B_i\,\vec{e_m}-(\partial_m\,B_j)\,B_j\,\vec{e_m}\\ &= B_i\,(\partial_i\,B_m)\,\vec{e_m}-\partial_m\,(B_j\,B_j/2)\,\vec{e_m}\\ &= \vec{B}\cdot\nabla\vec{B}-\nabla(B^2/2).\end{aligned}$$

由于磁场无源 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，可将 $(\nabla\cdot\vec{B})\,\vec{B}$ 加于上式，还可以有张量形式

$$(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = \nabla\cdot(\vec{B}\vec{B}-(B^2/2)\overset{\Rightarrow}{I}).$$

4.2 柱坐标系

柱坐标 $\{\rho,\,\varphi,\,z\}$ 的 z 坐标与笛卡尔直角坐标的 z 相同，对于另两个坐标，有关系

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{63}$$

$$\varphi = \arctan(y/x), \qquad x>0 \text{ 且 } y \geq 0 \text{ 时成立，其它情况需加 } \pi \text{ 或 } 2\pi \tag{64}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \tag{65}$$

$$y = \rho\sin\varphi. \tag{66}$$

不少地方会把式(63)记为 r，但那样会与球坐标的 r（式(133)）混淆，式(63)记为 ρ 可避免歧义。

4.2.1 基矢量

与(38)相同，注意 $\vec{e}_x,\,\vec{e}_y,\,\vec{e}_z$ 不随任何坐标变化，位矢（式(41)）随坐标的变化

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} &= \frac{\partial x}{\partial\rho}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\rho}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\rho}\vec{e}_z \\ &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y.\end{aligned} \tag{67}$$

$$\text{同理}\qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\vec{e}_x + \rho\cos\varphi\,\vec{e}_y. \tag{68}$$

式(67)恰好是单位长度，即为坐标 ρ 对应的单位基矢 $\vec{e}_\rho$。φ 不包含对空间尺度的测量，式(68)的模为 ρ，需要归一化来得到 $\vec{e}_\varphi$。笛卡尔直角坐标系的 $\vec{e}_z$ 可直接作为 z 坐标的单位基矢。沿用矢量的笛卡尔直角坐标系下括号简记方式，

$$\vec{e}_\rho = (\cos\varphi,\,\sin\varphi,\,0), \tag{69}$$

$$\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\,\cos\varphi,\,0), \tag{70}$$

$$\vec{e}_z = (0,\,0,\,1). \tag{71}$$

它们按此顺序组成右手系的标准正交基，满足式(5)和式(9)。且有导数关系

$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\rho} = \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\rho} = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z} = \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0},\ \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi} = \vec{0}\ \text{(分开写的原因是量纲不同)},$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = (-\sin\varphi,\,\cos\varphi,\,0) = \vec{e}_\varphi, \tag{72}$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = (-\cos\varphi,\,-\sin\varphi,\,0) = -\vec{e}_\rho. \tag{73}$$

结合式(65)(66)(67)，式(41)还可以写为

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z. \tag{74}$$

由刚刚得到的位矢对坐标的偏导数(67)(68)（或者直接对式(74)求微分），柱坐标下位矢的微分为

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \vec{e}_\varphi\,\rho\,\mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z\,\mathrm{d}z. \tag{75}$$

4.2.2 哈密顿算符

由链式求导法则

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{2\,x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{1+(y/x)^2}(-\frac{y}{x^2})\frac{\partial}{\partial \varphi} + 0 \\
&= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (76)
\end{aligned}
$$

同理
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{2\,y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + 0 \\
&= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (77)
\end{aligned}
$$

将式(69)(70)(76)(77)带入式(45)，得到柱坐标下

$$
\nabla = \vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (78)
$$

$$
\text{进而有} \qquad \nabla\rho = \vec{e_\rho},\ \nabla\varphi = \frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}.
$$

注意到 $\nabla\rho = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$，但 $\nabla\varphi$ 和 $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ 方向相同而模互为倒数。原因在于式(46)，即 f 取为 ρ, φ 时得到

$$
\mathrm{d}\rho = \nabla\rho\cdot\mathrm{d}\vec{r},\ \mathrm{d}\varphi = \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{r}.
$$

将位矢微分(75)和哈密顿算符(78)带入上面可再次验证。

4.2.3 梯度、散度、旋度、拉普拉斯算符

这里要考虑对基矢量的导数，由哈密顿算符(78)和前面得到的基矢量导数关系，先对

$$
\vec{u} = u_\rho\,\vec{e_\rho} + u_\varphi\,\vec{e_\varphi} + u_z\,\vec{e_z} \qquad (79)
$$

求梯度

$$
\begin{aligned}
\nabla\vec{u} =& (\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z})\,(u_\rho\,\vec{e_\rho} + u_\varphi\,\vec{e_\varphi} + u_z\,\vec{e_z}) \\
=& \vec{e_\rho}\,(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + u_\rho\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\vec{e_\varphi} + u_\varphi\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\vec{e_z} + u_z\frac{\partial \vec{e_z}}{\partial \rho}) + \\
& \frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\,(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}\vec{e_\rho} + u_\rho\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} + u_\varphi\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\vec{e_z} + u_z\frac{\partial \vec{e_z}}{\partial \varphi}) + \\
& \vec{e_z}\,(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\vec{e_\rho} + u_\rho\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial z} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\vec{e_\varphi} + u_\varphi\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\vec{e_z} + u_z\frac{\partial \vec{e_z}}{\partial z}) \\
=& \vec{e_\rho}\,(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \vec{0} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\vec{e_\varphi} + \vec{0} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\vec{e_z} + \vec{0}) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}(\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\vec{e_\rho}+u_\rho\vec{e_\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}+u_\varphi(-\vec{e_\rho})+\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\vec{e_z}+\vec{0})+\\
&\vec{e_z}(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\vec{e_\rho}+\vec{0}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\vec{e_\varphi}+\vec{0}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\vec{e_z}+\vec{0})
\end{aligned}
$$

$$
\text{即}\quad \nabla\vec{u}=\begin{cases}
\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\vec{e_\rho}\vec{e_\rho}+ & \frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}\vec{e_\rho}\vec{e_\varphi}+ & \frac{\partial u_z}{\partial\rho}\vec{e_\rho}\vec{e_z}+\\
(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho})\vec{e_\varphi}\vec{e_\rho}+ & (\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi})\vec{e_\varphi}\vec{e_\varphi}+ & \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}\vec{e_z}+\\
\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\vec{e_z}\vec{e_\rho}+ & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\vec{e_z}\vec{e_\varphi}+ & \frac{\partial u_z}{\partial z}\vec{e_z}\vec{e_z}
\end{cases} \tag{80}
$$

式(56)(57)可以适用于所有坐标系，符号换成相应坐标系的即可。所以散度

$$
\nabla\cdot\vec{u}=(\nabla\vec{u}):\vec{I}=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{81}
$$

旋度

$$
\nabla\times\vec{u}=(\nabla\vec{u}):\overset{\leftrightarrows}{\varepsilon}=(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial u_\varphi}{\partial z})\vec{e_\rho}+(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial\rho})\vec{e_\varphi}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e_z} \tag{82}
$$

拉普拉斯算符为

$$
\begin{aligned}
\nabla^2=&(\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z})\\
=&\vec{e_\rho}\cdot(\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\vec{e_\varphi}/\rho)}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial\vec{e_z}}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z})+\\
&\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\cdot(\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\vec{e_\varphi}/\rho)}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial\vec{e_z}}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z})+\\
&\vec{e_z}\cdot(\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\vec{e_\varphi}/\rho)}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial\vec{e_z}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z})+\\
=&(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+0+0+0+0+0)+(0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+0+0+0)+(0+0+0+0+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+0)\\
=&\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{83}
$$

4.2.4 例：变形速度张量的柱坐标表示

对式(80)转置可得 $(\nabla\vec{u})^T$。那么变形速度张量，即速度梯度的对称部分

$$
\frac{\nabla\vec{u}+(\nabla\vec{u})^T}{2}
=\begin{cases}
\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\vec{e_\rho}\vec{e_\rho}+ & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho})\vec{e_\rho}\vec{e_\varphi}+ & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_z}{\partial\rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial z})\vec{e_\rho}\vec{e_z}+\\
\frac{1}{2}(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho})\vec{e_\varphi}\vec{e_\rho}+ & (\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi})\vec{e_\varphi}\vec{e_\varphi}+ & \frac{1}{2}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z})\vec{e_\varphi}\vec{e_z}+\\
\frac{1}{2}(\frac{\partial u_z}{\partial\rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial z})\vec{e_z}\vec{e_\rho}+ & \frac{1}{2}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z})\vec{e_z}\vec{e_\varphi}+ & \frac{\partial u_z}{\partial z}\vec{e_z}\vec{e_z}
\end{cases}
$$

4.2.5 例：螺度

一个矢量场的旋度与自身点乘，称为该矢量场的旋度的螺度密度，表征它的螺旋特性。考虑这样一个速度场：$\vec{u} = \rho\,\omega\,\vec{e_\varphi} + u_z\,\vec{e_z}$，其中 ω, u_z 为常数。可以想象它的流线是螺旋上升的。先求旋度

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{u} =&\vec{e_\rho}\times\frac{\partial\,(\rho\,\omega\,\vec{e_\varphi}+u_z\,\vec{e_z})}{\partial\rho}+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\times\frac{\partial\,(\rho\,\omega\,\vec{e_\varphi}+u_z\,\vec{e_z})}{\partial\varphi}+\vec{e_z}\times\frac{\partial\,(\rho\,\omega\,\vec{e_\varphi}+u_z\,\vec{e_z})}{\partial z}\\ =&\vec{e_\rho}\times(\omega\,\vec{e_\varphi}+\vec{0})+\frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\times(\rho\,\omega\,(-\vec{e_r})+\vec{0})+\vec{e_z}\times\vec{0}\\ =&2\,\omega\,\vec{e_z}\end{aligned}\tag{84}$$

另外由式(82)得 $\nabla\times\vec{u} = (0-0)\,\vec{e_\rho} + (0-0)\,\vec{e_\varphi} + (\dfrac{2\,\rho\,\omega}{\rho} - 0)\,\vec{e_z} = 2\,\omega\,\vec{e_z}$，与式(84)的结果相同。$\vec{u}\cdot(\nabla\times\vec{u}) = 2\,\omega\,u_z$。如果 $u_z = 0$，则螺旋变成环绕，螺度应该为零。如果 $\omega = 0$，速度场空间上均匀，更不会有螺度，所以这样定义螺度是有几何意义的。

可以照式(80)(83)(84) 练习别的哈密顿算符运算，标准正交基下很多项为 0，熟练以后会非常快。

4.3 球坐标系

球坐标的 φ 与柱坐标下相同，对于球坐标 $\{r,\,\theta,\,\varphi\}$,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\tag{85}$$

$$\theta = \arccos\Big(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big),\tag{86}$$

$$\varphi = \arctan(y/x),\qquad x>0 \text{ 且 } y\ge 0 \text{ 时成立，其它情况需加 } \pi \text{ 或 } 2\,\pi\tag{87}$$

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi,\tag{88}$$

$$y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi,\tag{89}$$

$$z = r\,\cos\theta.\tag{90}$$

4.3.1 基矢量

经过与4.2.1节类似的步骤，得到球坐标下

$$\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{e_y} + \cos\theta\,\vec{e_z},\tag{91}$$

$$\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial\theta} = r\,\cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{e_x} + r\,\cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{e_y} - r\,\sin\theta\,\vec{e_z},\tag{92}$$

$$\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial\varphi} = -r\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{e_x} + r\,\sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{e_y}.\tag{93}$$

可以看到式(68)和式(139)是等价的，因为 $\rho = r\,\sin\theta$。上面各式归一化后即为单位基矢

$$\vec{e_r} = (\sin\theta\,\cos\varphi,\,\sin\theta\,\sin\varphi,\,\cos\theta),\tag{94}$$

$$\vec{e_\theta} = (\cos\theta\,\cos\varphi,\,\cos\theta\,\sin\varphi,\,-\sin\theta),\tag{95}$$

$$\vec{e_\varphi} = (-\sin\varphi,\,\cos\varphi,\,0),\tag{96}$$

它们同样按此顺序组成右手系的标准正交基，满足式(5)和式(9)。有导数关系

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial r}=\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial r}=\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial r}=\vec{0},\ \frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \theta}=\vec{0},\\
&\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}=(\cos\theta\,\cos\varphi,\,\cos\theta\,\sin\varphi,\,-\sin\theta)=\vec{e_\theta}, && (97)\\
&\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \theta}=(-\sin\theta\,\cos\varphi,\,-\sin\theta\,\sin\varphi,\,-\cos\theta)=-\vec{e_r}, && (98)\\
&\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi}=(-\sin\theta\,\sin\varphi,\,\sin\theta\,\cos\varphi,\,0)=\sin\theta\,\vec{e_\varphi}, && (99)\\
&\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \varphi}=(-\cos\theta\,\sin\varphi,\,\cos\theta\,\cos\varphi,\,0)=\cos\theta\,\vec{e_\varphi}, && (100)\\
&\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi}=(-\cos\varphi,\,-\sin\varphi,\,0)=-\sin\theta\,\vec{e_r}-\cos\theta\,\vec{e_\theta}. && (101)
\end{aligned}$$

还是构造式(41)的形式，得到球坐标下位矢

$$\vec{r}=r\,\vec{e_r}, \tag{102}$$

位矢的微分为

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{e_r}\,\mathrm{d}r+\vec{e_\theta}\,r\,\mathrm{d}\theta+\vec{e_\varphi}\,r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{103}$$

4.3.2 哈密顿算符

与4.2.2节类似，

$$\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\,\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\,\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\sin\theta}(-\sin\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{104}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\,\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\,\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\sin\theta}\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{105}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}(-\sin\theta)\,\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{106}$$

将式(94)(95)(96)(104)(105)(106) 带入式(45)，得到球坐标下

$$\nabla=\vec{e_r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e_\theta}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e_\varphi}\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{107}$$

以及 $\quad \nabla r=\vec{e_r},\ \nabla\theta=\dfrac{\vec{e_\theta}}{r},\ \nabla\varphi=\dfrac{\vec{e_\varphi}}{r\,\sin\theta}.$

将式(103)和哈密顿算符(107)带入式(46)，f 取为 $r,\,\theta$，仍然可以验证

$$\mathrm{d}r=\nabla r\cdot\mathrm{d}\vec{r},\ \mathrm{d}\theta=\nabla\theta\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

4.3.3 梯度、散度、旋度、拉普拉斯算符

本节为简洁省略为 0 的项。由哈密顿算符(107)和前面得到的基矢量导数关系，对于

$$\vec{u}=u_r\,\vec{e_r}+u_\theta\,\vec{e_\theta}+u_\varphi\,\vec{e_\varphi} \tag{108}$$

梯度

$$\begin{aligned}
\nabla\vec{u}=&(\vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\vec{e_\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})\,(u_r\,\vec{e_r}+u_\theta\,\vec{e_\theta}+u_\varphi\,\vec{e_\varphi})\\
=&\vec{e_r}\,(\vec{e_r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\vec{e_\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\vec{e_\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r})+\frac{\vec{e_\theta}}{r}\,(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\,\vec{e_r}+u_r\,\vec{e_\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta}+u_\theta\,(-\vec{e_r})+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\,\vec{e_\varphi})+\\
&\frac{\vec{e_\varphi}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\,\vec{e_r}+u_r\,\sin\theta\,\vec{e_\varphi}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\,\vec{e_\theta}+u_\theta\,\cos\theta\,\vec{e_\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi}+u_\varphi\,(-\sin\theta\,\vec{e_r}-\cos\theta\,\vec{e_\theta})\right)\\
=&\begin{cases}
\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\,\vec{e_r}\,\vec{e_r}+ & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\,\vec{e_r}\,\vec{e_\theta}+ & \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}\,\vec{e_r}\,\vec{e_\varphi}+\\
(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}-\dfrac{u_\theta}{r})\,\vec{e_\theta}\,\vec{e_r}+ & (\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta})\,\vec{e_\theta}\,\vec{e_\theta}+ & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta}\,\vec{e_\varphi}+\\
\multicolumn{3}{l}{\dfrac{1}{r\sin\theta}[(\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}-u_\varphi\,\sin\theta)\,\vec{e_\varphi}\,\vec{e_r}+(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-u_\varphi\,\cos\theta)\,\vec{e_\varphi}\,\vec{e_\theta}+(u_r\,\sin\theta+u_\theta\,\cos\theta+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi})\,\vec{e_\varphi}\,\vec{e_\varphi}]}
\end{cases}
\end{aligned} \tag{109}$$

散度

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{u}=(\nabla\vec{u}):\vec{\vec{I}}&=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}(u_r\,\sin\theta+u_\theta\,\cos\theta+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi})\\
&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2\,u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(\sin\theta\,u_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}
\end{aligned} \tag{110}$$

旋度

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{u}=&(\nabla\vec{u}):\vec{\vec{\vec{\varepsilon}}}\\
=&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-u_\varphi\,\cos\theta)\right)\vec{e_r}+\left(\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-u_\varphi\,\sin\theta)-\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}+\\
&\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r})\right)\vec{e_\varphi}\\
=&\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\,(\sin\theta\,u_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\,(r\,u_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(r\,u_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}
\end{aligned} \tag{111}$$

拉普拉斯算符

$$\begin{aligned}
\nabla^2=&(\vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\vec{e_\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})\cdot(\vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\vec{e_\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
=&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned} \tag{112}$$

4.4 拉梅系数

本文中，本节且仅本节不使用爱因斯坦求和约定，若求和会出现 $\sum$ 符号。

4.4.1 定义及相关符号的表示

一般地，若 q_i 为某正交坐标系的第 i 个坐标，可称

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| \tag{113}$$

为 q_i 的拉梅系数。由4.2.1节、4.3.1节的结果，简单地就有

$$h_x = h_y = h_z = h_\rho = h_r = 1,\ h_\varphi = \rho = r\,\sin\theta,\ h_\theta = r. \tag{114}$$

所以对应的单位基矢为

$$\vec{e_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \tag{115}$$

所以位矢的微分，即有向线元为

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i h_i\,\vec{e_i}\,\mathrm{d}q_i. \tag{116}$$

[速度势、流函数细谈] 由此给出了各坐标系下的流线方程。$\vec{e_i}$, $\vec{e_j}$ 两个方向的线元张成的有向面元为

$$\mathrm{d}\vec{S}_{ij} = (h_i\,\mathrm{d}q_i\,\vec{e_i}) \times (h_j\,\mathrm{d}q_j\,\vec{e_j}) = \sum_k h_i\,h_j\,\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_j\,\varepsilon_{ijk}\,\vec{e_k}. \tag{117}$$

比如说球面 $S|_{r=r_0}$ 上的通量积分为

$$\int_{S|_{r=r_0}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S|_{r=r_0}} F_r\,r_0\,r_0\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{118}$$

一般记 $\prod$ 为求积符号，体元为 $\mathrm{d}V = \prod_i h_i\,\mathrm{d}q_i$。

由式(46)，

$$\mathrm{d}q_i = \nabla q_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{119}$$

一个坐标函数的梯度必然与该坐标的基矢平行，比较式(116)中的分量，所以

$$\nabla q_i = \frac{\vec{e_i}}{h_i}. \tag{120}$$

进而哈密顿算符为

$$\nabla = \sum_i \frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{121}$$

4.4.2 与基矢量的关系

对位矢求两次导数，求导顺序不影响结果

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_j} = \frac{\partial\,(h_i\,\vec{e_i})}{\partial q_j} = \frac{\partial\,(h_j\,\vec{e_j})}{\partial q_i} \tag{122}$$

再因为

$$\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot(h_j\,\vec{e_j}) = \delta_{ij} \tag{123}$$

上式求对 q_k 的导数，可知

$$\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot\frac{\partial\,(h_j\,\vec{e_j})}{\partial q_k} = -(h_j\,\vec{e_j})\cdot\frac{\partial\,(\vec{e_i}/h_i)}{\partial q_k} \tag{124}$$

特别的

$$\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot\frac{\partial\,(h_i\,\vec{e_i})}{\partial q_k} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\,h_i}{\partial q_k} \tag{125}$$

4.4.3 梯度、散度、旋度、拉普拉斯算符

本节用了一个求导技巧

$$\sum_i \frac{1}{\prod_i h_i}\frac{\partial\,(\prod_i h_i)}{\partial q_j} = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\,h_i}{\partial q_j} \tag{126}$$

本节中，下划波浪线部分应用了式(122)，红色部分应用了式(123)，绿色部分应用了式(124)，蓝色部分应用了式(125)，下划直线部分应用了式(126)。

矢量场 $\vec{u}$ 的梯度

$$\nabla\vec{u} = \sum_{i,j}\frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial\,(u_j\,\vec{e_j})}{\partial q_i} \tag{127}$$

散度为矢量场梯度的自缩并

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{u} &= \sum_{i,j}\Big(\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot(h_j\,\vec{e_j})\frac{\partial\,(u_j/h_j)}{\partial q_i} + \frac{u_j}{h_j}\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot\underline{\frac{\partial\,(h_j\,\vec{e_j})}{\partial q_i}}\Big)\\
&= \sum_{i,j}\Big(\delta_{ij}\frac{\partial\,(u_j/h_j)}{\partial q_j} + \frac{u_j}{h_j}\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot\underline{\frac{\partial\,(h_i\,\vec{e_i})}{\partial q_j}}\Big)\\
&= \sum_j\Big(\frac{\partial\,(u_j/h_j)}{\partial q_j} + \frac{u_j}{h_j}\underline{\sum_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial\,h_i}{\partial q_j}}\Big)\\
&= \sum_j\Big(\frac{\partial\,(u_j/h_j)}{\partial q_j} + \frac{u_j}{h_j}\underline{\sum_i\frac{1}{\prod_i h_i}\frac{\partial\,(\prod_i h_i)}{\partial q_j}}\Big)\\
&= \sum_j\frac{1}{\prod_i h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{u_j}{h_j}\prod_i h_i\right)
\end{aligned} \tag{128}$$

将哈密顿算符(121)看作矢量，其 j 分量为 $\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}$，代入散度式(128)，就得到拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \sum_j \frac{1}{\prod_i h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{h_j^2}(\prod_i h_i)\frac{\partial}{\partial q_j}\right) \tag{129}$$

柱坐标、球坐标的拉普拉斯算符式(83)、式(112) 是通过对基矢求导求内积的方式一步步推出来的，而对基矢求导求内积的步骤其实已经在散度式(81)、式(110)中做过了。所以将哈密顿算符(78)作为矢量带入(81)，哈密顿算符(107)作为矢量带入(110)，可以直接得到式(83)、式(112)的结果。

旋度

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{u} &= \nabla\vec{u} : \overset{\Rrightarrow}{\varepsilon} \\
&= \left(\sum_{i,j}\frac{\vec{e_i}}{h_i}(\frac{\partial(u_j h_j)}{\partial q_i}\frac{\vec{e_j}}{h_j} + (u_j h_j)\frac{\partial(\vec{e_j}/h_j)}{\partial q_i})\right) : \left(\sum_{k,l,m}\frac{\varepsilon_{klm}}{h_k h_l}(h_k\vec{e_k})(h_l\vec{e_l})\vec{e_m}\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l,m}\frac{\vec{e_i}}{h_i}\cdot(h_k\vec{e_k})\left(\frac{\vec{e_j}}{h_j}\cdot(h_l\vec{e_l})\frac{\partial(u_j h_j)}{\partial q_i} + (u_j h_j)(h_l\vec{e_l})\cdot\frac{\partial(\vec{e_j}/h_j)}{\partial q_i}\right)\frac{\varepsilon_{klm}}{h_k h_l}\vec{e_m} \\
&= \sum_{i,j,k,l,m}\delta_{ik}\,\delta_{jl}\frac{\varepsilon_{klm}}{h_k h_l}\frac{\partial(u_j h_j)}{\partial q_i}\vec{e_m} + \sum_{i,j,k,l,m}\delta_{ik}\frac{\varepsilon_{klm}}{h_k h_l}(u_j h_j)(h_l\vec{e_l})\cdot\frac{\partial(\vec{e_j}/h_j)}{\partial q_i}\vec{e_m}
\end{aligned}$$

上式的第二部分为

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,l,m}\frac{\varepsilon_{ilm}}{h_i h_l}(u_j h_j)(h_l\vec{e_l})\cdot\frac{\partial(\vec{e_j}/h_j)}{\partial q_i}\vec{e_m} &= -\boxed{\sum_{i,j,l,m}\frac{\varepsilon_{ilm}}{h_i h_l}(u_j h_j)\frac{\vec{e_j}}{h_j}\cdot\frac{\partial(h_l\vec{e_l})}{\partial q_i}\vec{e_m}} \\
&= -\sum_{i,j,l,m}\frac{\varepsilon_{ilm}}{h_i h_l}(u_j h_j)\frac{\vec{e_j}}{h_j}\cdot\frac{\partial(h_i\vec{e_i})}{\partial q_l}\vec{e_m} \\
\text{交换 } \varepsilon_{ilm} \text{ 的下标 } i,\, l\text{，符号相反} \quad &= \sum_{i,j,l,m}\frac{\varepsilon_{lim}}{h_i h_l}(u_j h_j)\frac{\vec{e_j}}{h_j}\cdot\frac{\partial(h_i\vec{e_i})}{\partial q_l}\vec{e_m} \\
\text{交换所有的下标 } i,\, l \quad &= \boxed{\sum_{l,j,i,m}\frac{\varepsilon_{ilm}}{h_l h_i}(u_j h_j)\frac{\vec{e_j}}{h_j}\cdot\frac{\partial(h_l\vec{e_l})}{\partial q_i}\vec{e_m}}
\end{aligned}$$

两个方框内的内容相同，可又互为相反数，故此项为 $\vec{0}$，可舍去。即有

$$\nabla\times\vec{u} = \sum_{i,j,m}\frac{\varepsilon_{ijm}}{h_i h_j}\frac{\partial(u_j h_j)}{\partial q_i}\vec{e_m} \tag{130}$$

叉乘是三维空间特有的操作，所以旋度也是三维空间特有的量。除旋度外本节的结论可以拓展至任意维数的空间。

这里刻意使用的 $h_i\,\vec{e_i}$，$\frac{\vec{e_i}}{h_i}$，$\frac{u_i}{h_i}$，$u_i\,h_i$ 其实已经涉及到了非单位长度基矢的协变逆变，也因此证明上述各式才变得简单。将(114)带入式 (128)(129)(130) 正好得到4.2.3节、4.3.3节的结果。

[拉梅系数应用的几何理解] 通过几何的方式也导出了上述各式，图像非常清楚。本节通过代数推导得到了相同的结论，是对4.2节、4.3节的总结和升华。

4.4.4 例：经纬球坐标系

4.3节遵循数学习惯定义 $\theta \in [0,\, \pi]$。在习惯用南北纬的星球中，定义在 $[-\pi/2,\, \pi/2]$ 的 $\vartheta = \pi/2 - \theta$ 更方便，可将 ϑ 带入4.3节关于 θ 的各式得到对应的形式。但要注意此时 $\{\vec{e_r},\, \vec{e_\vartheta},\, \vec{e_\varphi}\}$ 组成左手系，叉乘运算中的符号会不一样。

交换基矢顺序也能组成右手系。4.3节的 φ 同时也是经度，这里新定义的 ϑ 其实就是纬度。然后我们就有了描述星球上位置更方便的经纬球坐标 $\{\varphi,\, \vartheta,\, r\}$,

$$\varphi = \arctan(y/x), \qquad x > 0 \text{ 且 } y \geq 0 \text{ 时成立，其它情况需加 } \pi \text{ 或 } 2\pi \tag{131}$$

$$\vartheta = \arcsin\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), \tag{132}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{133}$$

$$x = r\, \cos\vartheta\, \cos\varphi, \tag{134}$$

$$y = r\, \cos\vartheta\, \sin\varphi, \tag{135}$$

$$z = r\, \sin\vartheta. \tag{136}$$

就有

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r\, \cos\vartheta\, \sin\varphi\, \vec{e_x} + r\, \cos\vartheta\, \cos\varphi\, \vec{e_y}, \tag{137}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = -r\, \sin\vartheta\, \cos\varphi\, \vec{e_x} - r\, \sin\vartheta\, \sin\varphi\, \vec{e_y} + r\, \cos\vartheta\, \vec{e_z}, \tag{138}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\vartheta\, \cos\varphi\, \vec{e_x} + \cos\vartheta\, \sin\varphi\, \vec{e_y} + \sin\vartheta\, \vec{e_z}. \tag{139}$$

上面各式归一化后即为单位基矢

$$\vec{e_\varphi} = (-\sin\varphi,\, \cos\varphi,\, 0), \tag{140}$$

$$\vec{e_\vartheta} = (-\sin\vartheta\, \cos\varphi,\, -\sin\vartheta\, \sin\varphi,\, \cos\vartheta), \tag{141}$$

$$\vec{e_r} = (\cos\vartheta\, \cos\varphi,\, \cos\vartheta\, \sin\varphi,\, \sin\vartheta), \tag{142}$$

它们同样按此顺序组成右手系的标准正交基。有导数关系

$$\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e_\vartheta}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial r} = \vec{0},\ \frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \vartheta} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial \vec{e_\vartheta}}{\partial \vartheta} = (-\cos\vartheta\, \cos\varphi,\, -\cos\vartheta\, \sin\varphi,\, -\sin\vartheta) = -\vec{e_r}, \tag{143}$$

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \vartheta} = (-\sin\vartheta\, \cos\varphi,\, -\sin\vartheta\, \sin\varphi,\, \cos\vartheta) = \vec{e_\vartheta}, \tag{144}$$

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi} = (-\cos\vartheta\, \sin\varphi,\, \cos\vartheta\, \cos\varphi,\, 0) = \cos\vartheta\, \vec{e_\varphi}, \tag{145}$$

$$\frac{\partial \vec{e_\vartheta}}{\partial \varphi} = (\sin\vartheta\, \sin\varphi,\, -\sin\theta\, \cos\varphi,\, 0) = -\sin\vartheta\, \vec{e_\varphi}, \tag{146}$$

$$\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi} = (-\cos\varphi,\, -\sin\varphi,\, 0) = \sin\vartheta\, \vec{e_\vartheta} - \cos\vartheta\, \vec{e_r}. \tag{147}$$

位矢

$$\vec{r} = r\,\vec{e_r}, \tag{148}$$

位矢的微分为

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e_\varphi}\, r\,\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varphi + \vec{e_\vartheta}\, r\,\mathrm{d}\vartheta + \vec{e_r}\,\mathrm{d}r \tag{149}$$

拉梅系数为

$$h_\varphi = r\,\cos\vartheta,\ h_\vartheta = r,\ h_r = 1.$$

代入式(121)得到

$$\nabla = \vec{e_\varphi}\frac{1}{r\,\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e_\vartheta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{150}$$

$$\text{以及}\qquad \nabla\varphi = \frac{\vec{e_\varphi}}{r\,\cos\vartheta},\ \nabla\vartheta = \frac{\vec{e_\vartheta}}{r},\ \nabla r = \vec{e_r}.$$

代入式(127)经运算得到

$$\nabla\vec{u} = \begin{cases} \frac{1}{r\,\cos\vartheta}[(\frac{\partial\,u_\varphi}{\partial\varphi} - u_\vartheta\,\sin\vartheta + u_r\,\cos\vartheta)\,\vec{e_\varphi}\,\vec{e_\varphi} + (u_\varphi\sin\vartheta + \frac{\partial\,u_\vartheta}{\partial\varphi})\,\vec{e_\varphi}\,\vec{e_\vartheta} + (-u_\varphi\cos\vartheta + \frac{\partial\,u_r}{\partial\varphi})\,\vec{e_\varphi}\,\vec{e_r}] \\ \qquad + \frac{1}{r}\frac{\partial\,u_\varphi}{\partial\vartheta}\,\vec{e_\vartheta}\,\vec{e_\varphi} + \quad \frac{1}{r}(\frac{\partial\,u_\vartheta}{\partial\vartheta} + u_r)\,\vec{e_\vartheta}\,\vec{e_\vartheta} + \quad \frac{1}{r}(-u_\vartheta + \frac{\partial\,u_r}{\partial\vartheta})\,\vec{e_\vartheta}\,\vec{e_r} \\ \qquad + \frac{\partial\,u_\varphi}{\partial r}\,\vec{e_r}\,\vec{e_\varphi} + \quad \frac{\partial\,u_\vartheta}{\partial r}\,\vec{e_r}\,\vec{e_\vartheta} + \quad \frac{\partial\,u_r}{\partial r}\,\vec{e_r}\,\vec{e_r} \end{cases} \tag{151}$$

代入式(128)得到

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{1}{r\,\cos\vartheta}\frac{\partial\,u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\,\cos\vartheta}\frac{\partial\,(\cos\vartheta\,u_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2\,u_r)}{\partial r} \tag{152}$$

代入式(130)得到

$$\nabla\times\vec{u} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,u_r}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\,(r\,u_\vartheta)}{\partial r}\right)\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(r\,u_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial\,u_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\,\cos\vartheta}\left(\frac{\partial\,u_\vartheta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\,(\cos\vartheta\,u_\varphi)}{\partial\vartheta}\right)\vec{e_r} \tag{153}$$

代入式(129)得到

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2\,\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\,\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{154}$$

经过将拉梅系数代入，式 (152) (153) (154) 不用经过类似 4.3节里的中间步骤就能直接得到。

4.5 三个坐标系间张量分量系数的变换

同一矢量 $\vec{u}$ 在上述三个坐标系下有式(39)(79)(108)三种形式，分量数值随坐标系的变换可以由式(29)给出。

将式(69)(70)(71)纵向拼起来就是笛卡尔直角坐标系到柱坐标系的方向余弦矩阵，所以有

$$\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \tag{155}$$

注意这里方向余弦矩阵的值与空间坐标 φ 有关，不是空间上不变的。

将式(94)(95)(96)纵向拼起来就是笛卡尔直角坐标系到球坐标系的方向余弦矩阵，就有

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \tag{156}$$

这里方向余弦矩阵的值与空间坐标 θ, φ 有关。

将式(94)(95)(96)和式(69)(70)(71)相应点乘，可以得到柱坐标到球坐标的方向余弦矩阵，就有

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix}. \tag{157}$$

由于两坐标系的 φ 是一样的，这里方向余弦矩阵的值与只与 θ 有关。

由式(26)，对上面各矩阵的转置，得到对应逆变换的方向余弦矩阵，就有对应的逆变换。

式(157)中的矩阵也是式(156)中的矩阵与式(155)中的矩阵的转置的乘法。即等价于矢量分量先从柱坐标系转到笛卡尔直角坐标系，再转到球坐标系。

有了各个坐标系间的方向余弦矩阵，二阶张量分量可以按式(28)进行转换。更高阶的张量类似。比如笛卡尔直角坐标系下的矢量的梯度式(50)按此可以转换为柱坐标系下的式(80)和球坐标系下的式(109)，展开书写过于冗长，符号计算程序 [速度梯度分量变换.nb]（由 Wolfram Mathematica 打开）展示了这个过程。

4.6 矢量函数泰勒展开

与 [多元函数泰勒展开] 的证明基本一致，这里将结果写成张量形式。

把 $f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r})$ 当成关于 t 的单变量函数 $\chi(t)$，在 $t=0$ 做泰勒展开

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n\chi}{\mathrm{d}t^n}\bigg|_{t=0}, \tag{158}$$

由链式法则（注意爱因斯坦求和约定）

$$\frac{\mathrm{d}\,\chi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r})}{\partial r_i}\frac{\mathrm{d}(r_i+t\,\delta r_i)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r})}{\partial r_i}\delta r_i = \delta\vec{r}\cdot\nabla f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r}).$$

再对 t 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\chi(t)}{\mathrm{d}t^2}=\delta\vec{r}\cdot\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\,f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r})}{\mathrm{d}t}\right)=(\delta\vec{r}\,\delta\vec{r})\cdot\cdot(\nabla\nabla f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r})),$$

注意哈密顿算符 ∇ 和 $\delta\vec{r}$ 一样有矢量性，需要并乘。进而有

$$\frac{\mathrm{d}^n\,\chi(t)}{\mathrm{d}t^n}=\delta r_{i_1}\,\delta r_{i_2}\ldots\delta r_{i_n}\,\frac{\partial^n f(\vec{r})}{\partial r_{i_1}\partial r_{i_2}\ldots\partial r_{i_n}}=(\overbrace{\delta\vec{r}\backsim\delta\vec{r}}^{n})\overbrace{\cdot\backsim\cdot}^{n}(\overbrace{\nabla\backsim\nabla}^{n}f(\vec{r}+t\,\delta\vec{r})),\tag{159}$$

其中 $\overbrace{\cdot\backsim\cdot}^{n}$ 为 n 个相同的点乘符号 $\cdot$ 排在一起，对 $\delta\vec{r}$, ∇ 同理。取 $t=1$，就得到

$$\begin{aligned}&f(\vec{r}+\delta\vec{r})\\=&f(\vec{r})+\delta\vec{r}\cdot\nabla f(\vec{r})+\frac{1}{2}(\delta\vec{r}\,\delta\vec{r})\cdot\cdot(\nabla\nabla f(\vec{r}))+\ldots+\frac{1}{n!}(\overbrace{\delta\vec{r}\backsim\delta\vec{r}}^{n})\overbrace{\cdot\backsim\cdot}^{n}(\overbrace{\nabla\backsim\nabla}^{n}f(\vec{r}))+\ldots\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\overbrace{\delta\vec{r}\backsim\delta\vec{r}}^{n})\overbrace{\cdot\backsim\cdot}^{n}(\overbrace{\nabla\backsim\nabla}^{n}f(\vec{r})),\end{aligned}\tag{160}$$

这里的 f 也可以是张量。此表达式不依赖于坐标系，按对应坐标系下符号形式书写就是那个坐标系下的表达。

5 旋转

5.1 绕轴旋转

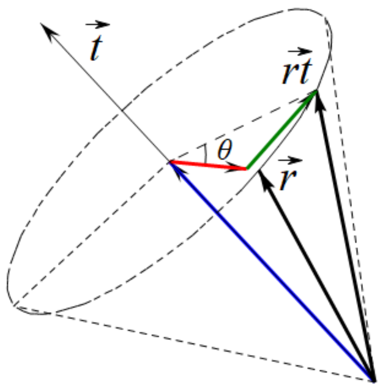

图 1: $\vec{rt}$ 分解图。

如图1，$\vec{r}$ 绕轴 $\vec{t}$ 逆时针旋转角 θ 得 $\vec{rt}$。其中 $\vec{r}$, $\vec{t}$, $\vec{rt}$ 共原点，$\vec{t}$ 为单位矢量

$$t_i\,t_i=1.\tag{161}$$

那么通过对 $\vec{rt}$ 矢量投影分解 (下式带颜色的各项对应图1中相同颜色的矢量) 可知

$$\vec{rt}=(\vec{r}\cdot\vec{t}\,)\,\vec{t}+\left(\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{t}\,)\,\vec{t}\right)\cos\theta+\vec{t}\times\vec{r}\,\sin\theta,\tag{162}$$

5.1.1 例：球面上连接两点的弧

单位球上点 $\vec{e_{r,0}} = (\sin\theta_0\ \cos\varphi_0, \sin\theta_0\ \sin\varphi_0, \cos\theta_0)$, $\vec{e_{r,1}} = (\sin\theta_1\ \cos\varphi_1, \sin\theta_1\ \sin\varphi_1, \cos\theta_1)$。对于连接两点的大圆劣弧的弧长 Φ_{01}，有

$$\cos(\Phi_{01}) = \vec{e_{r,0}} \cdot \vec{e_{r,1}} = \cos\theta_0\ \cos\theta_1 + \sin\theta_0\ \sin\theta_1\ \cos(\varphi_1 - \varphi_0). \tag{163}$$

从 $\vec{e_{r,0}}$ 出发沿大圆转度数 Φ_{01} 到 $\vec{e_{r,1}}$ 的轴为 $\dfrac{\vec{e_{r,0}} \times \vec{e_{r,1}}}{|\vec{e_{r,0}} \times \vec{e_{r,1}}|}$。由式(162)，同样方式转角度 Φ_{02} 得到

$$\vec{e_{r,2}} = \vec{e_{r,0}}\ \cos\Phi_{02} + \frac{(\vec{e_{r,0}} \times \vec{e_{r,1}})}{|\vec{e_{r,0}} \times \vec{e_{r,1}}|} \times \vec{e_{r,0}}\ \sin\Phi_{02} = \vec{e_{r,0}}\ \frac{\sin(\Phi_{01} - \Phi_{02})}{\sin(\Phi_{01})} + \vec{e_{r,1}}\ \frac{\sin(\Phi_{02})}{\sin(\Phi_{01})}. \tag{164}$$

切向量为

$$\frac{\partial\, \vec{e_{r,2}}}{\partial \Phi_{02}} = -\vec{e_{r,0}}\ \frac{\cos(\Phi_{01} - \Phi_{02})}{\sin(\Phi_{01})} + \vec{e_{r,1}}\ \frac{\cos(\Phi_{02})}{\sin(\Phi_{01})}. \tag{165}$$

5.2 旋转张量

沿用第3节定义过的 $\overset{\rightrightarrows}{I}$, $\overset{\lower{0pt}{\Rrightarrow}}{\varepsilon}$，构造旋转张量

$$\overset{\rightrightarrows}{R}\left(\vec{t}, \theta\right) = \vec{t}\,\vec{t} + \overset{\rightrightarrows}{I}\ \cos\theta - \vec{t}\,\vec{t}\ \cos\theta - \overset{\Rrightarrow}{\varepsilon} \cdot \vec{t}\ \sin\theta, \tag{166}$$

式(162)就是 $$\vec{rt} = \overset{\rightrightarrows}{R}\left(\vec{t}, \theta\right) \cdot \vec{r}. \tag{167}$$

设定这里是右手系（对于左手系下式的 $\sin\theta$ 前的符号要写成 $+$），分量形式为

$$R\left(\vec{t}, \theta\right)_{ij} = (1 - \cos\theta)\, t_i\, t_j + \cos\theta\, \delta_{ij} - \sin\theta\, \varepsilon_{ijk}\, t_k, \tag{168}$$

$$rt_i = R\left(\vec{t}, \theta\right)_{ij} r_j, \tag{169}$$

简单地还可以得到

$$\overset{\rightrightarrows}{R}\left(\vec{t}, 0\right) = \overset{\rightrightarrows}{I}. \tag{170}$$

5.2.1 旋转矩阵

$\overset{\rightrightarrows}{R}$ 的矩阵形式

$$R\left(\vec{t}, \theta\right) = (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} {t_1}^2 & t_1\, t_2 & t_1\, t_3 \\ t_2\, t_1 & {t_2}^2 & t_2\, t_3 \\ t_3\, t_1 & t_3\, t_2 & {t_3}^2 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{171}$$

容易验证

$$R\left(\vec{t}, \theta\right) = R\left(-\vec{t}, -\theta\right). \tag{172}$$

像 $R\left((\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{4\,\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，可将 $\vec{e_x}$ 转到 $\vec{e_y}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{绕 } z \text{ 轴旋转为} \qquad R\left(\vec{e_z}, \theta\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{173}$$

去掉 z 坐标的维度即为二维旋转矩阵。只用三个角度参数就可以表达任意旋转的欧拉角矩阵为

$$R\left(\vec{e_z}, \theta_3\right) R\left(\vec{e_x}, \theta_2\right) R\left(\vec{e_z}, \theta_1\right). \tag{174}$$

三维空间里的旋转只有三个自由度，而式(171)有四个标量参数。出于式(161)的约束，式(171)其实只有三个自由度。若将 $\vec{t}$ 写成 $\vec{e_r}$（式(94)）的形式，式(171)也可以只显式地需要三个标量参数。

5.2.2 绕同一轴转两次

绕 $\vec{t}$ 转两次，角度依次为 θ_1, θ_2，有

$$\begin{aligned}
& R\left(\vec{t}, \theta_2\right)_{ij} R\left(\vec{t}, \theta_1\right)_{jl} \\
=& \left((1-\cos\theta_2)\, t_i\, t_j + \cos\theta_2\, \delta_{ij} - \sin\theta_2\, \varepsilon_{ijk}\, t_k\right)\left((1-\cos\theta_1)\, t_j\, t_l + \cos\theta_1\, \delta_{jl} - \sin\theta_1\, \varepsilon_{jlm}\, t_m\right) \\
=& (1-\cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)\, t_i\, \underline{t_j\, t_j}\, t_l + \cos\theta_2\, \delta_{ij}(1-\cos\theta_1)\, t_j\, t_l - \underline{\sin\theta_2\, \varepsilon_{ijk}\, t_k\, (1-\cos\theta_1)\, t_j\, t_l} + \\
& (1-\cos\theta_2)\, t_i\, t_j\, \cos\theta_1\, \delta_{jl} + \cos\theta_2\, \delta_{ij}\, \cos\theta_1\, \delta_{jl} - \sin\theta_2\, \varepsilon_{ijk}\, t_k\, \cos\theta_1\, \delta_{jl} - \\
& \underline{(1-\cos\theta_2)\, t_i\, t_j\, \sin\theta_1\, \varepsilon_{jlm}\, t_m} - \cos\theta_2\, \delta_{ij}\, \sin\theta_1\, \varepsilon_{jlm}\, t_m + \sin\theta_2\, \varepsilon_{ijk}\, t_k\, \sin\theta_1\, \varepsilon_{jlm}\, t_m
\end{aligned}$$

由式(12)，$\varepsilon_{ijk}\, t_k\, t_j, t_j\, \varepsilon_{jlm}\, t_m$ 都是 0，并注意式(161)，划线部分可以直接舍掉。

注意用式(3)，同颜色的项经过运算得

$$\begin{aligned}
=& (1-\cos\theta_1\, \cos\theta_2)\, t_i\, t_l + \cos\theta_1\, \cos\theta_2\, \delta_{il} - \sin(\theta_1+\theta_2)\, \varepsilon_{ilm}\, t_m + \sin\theta_1\, \sin\theta_2\, (\delta_{kl}\, \delta_{im} - \delta_{km}\, \delta_{il})\, t_k\, t_m \\
=& (1-\cos\theta_1\, \cos\theta_2 + \sin\theta_1\, \sin\theta_2)\, t_i\, t_l + (\cos\theta_1\, \cos\theta_2 - \sin\theta_1\, \sin\theta_2)\, \delta_{il} - \sin(\theta_1+\theta_2)\, \varepsilon_{ilm}\, t_m \\
=& (1-\cos(\theta_1+\theta_2))\, t_i\, t_l + \cos(\theta_1+\theta_2)\, \delta_{il} - \sin(\theta_1+\theta_2)\, \varepsilon_{ilm}\, t_m \\
=& R\left(\vec{t}, (\theta_1+\theta_2)\right)_{il},
\end{aligned} \tag{175}$$

与旋转两次的预期相符。所以 $R\left(\vec{t}, \theta\right)^{-1} R\left(\vec{t}, -\theta\right) = I$，即有

$$R\left(\vec{t}, \theta\right)^{-1} = R\left(\vec{t}, -\theta\right) \tag{176}$$

5.3 张量的旋转

基矢量被旋转后，其构成的张量也会被旋转。对任意二阶张量 $\vec{A} = A_{ij}\, \vec{e_i}\, \vec{e_j}$，被旋转后就是

$$\begin{aligned}
A_{ij}\, (\vec{R} \cdot \vec{e_i})\, (\vec{R} \cdot \vec{e_j}) &= A_{ij}\, (R_{kl}\, \vec{e_k}\, \delta_{li})\, (R_{mn}\, \vec{e_m}\, \delta_{nj}) \\
&= R_{ki}\, R_{mj}\, A_{ij}\, \vec{e_k}\, \vec{e_m}
\end{aligned}$$

$$= (R\,A\,R^T)_{km}\,\vec{e_k}\,\vec{e_m} \tag{177}$$

$$= \overleftrightarrow{R} \cdot \overleftrightarrow{A} \cdot (\overleftrightarrow{R})^T \tag{178}$$

对任意三阶张量 $\overset{\Rrightarrow}{Q}$ 的旋转，左右点积都无法表达对中间那阶的点乘，只能用分量形式表达为 $R_{il}\,R_{jm}\,R_{kn}\,Q_{lmn}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k}$。更高阶张量的旋转形式类似。而 0 阶张量也就是标量，旋转不改变其数值。

5.4 旋转与坐标系变换的关系

将 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ 绕轴 $\vec{t}$ 旋转 θ 得到 $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$，即

$$\vec{g_i} = \overleftrightarrow{R} \cdot \vec{e_i} = (R_{jk}\,\vec{e_j}\,\vec{e_k}) \cdot \vec{e_i} = R_{jk}\,\vec{e_j}\,\delta_{ki} = R_{ji}\,\vec{e_j}. \tag{179}$$

这样得到的 $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ 不会改变坐标系手性，因为

$$\begin{aligned}(\vec{g_1} \times \vec{g_2}) \cdot \vec{g_3} &= ((R_{i1}\,\vec{e_i}) \times (R_{j2}\,\vec{e_j})) \cdot (R_{k3}\,\vec{e_k}) \\ &= R_{i1}\,R_{j2}\,R_{k3}\,\varepsilon_{ijk}\,(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \cdot \vec{e_3} \\ &= \det(R)\,(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \cdot \vec{e_3}.\end{aligned} \tag{180}$$

将式(173)带入，$\det(R) = 1$。其他任意旋转可按欧拉角旋转(174)的形式得到，组合的行列式仍为 1。对于坐标系变换，对式(26)求行列式，得 $\det(D) = 1/\det(D)$，即 $\det(D) = \pm 1$。若坐标系手性不变，即取 $\det(D) = 1$; 若再交换其中两基矢的顺序，坐标系手性会改变，此时取 $\det(D) = -1$。

这里概念有些容易混淆。坐标系变换是更换了基矢量，让张量的分量数值随坐标系改变。而对张量本身的旋转，是使用原基矢量表示的情况下看旋转后的张量分量如何变化。

从式(176)和式(171)的形式易知

$$R\left(\vec{t}, \theta\right)^{-1} = R\left(\vec{t}, \theta\right)^T, \tag{181}$$

性质与第3.1节中的方向余弦矩阵 D 相同。对比式(179)和式(25)，发现

$$R = D^T = D^{-1}. \tag{182}$$

比较式(29)和式(167)，以及比较式(28)和式(178)，发现除了使用的矩阵不同，形式是相同的。可以这么理解，将张量 $\overleftrightarrow{A}$ 旋转得到 $\overleftrightarrow{B} = (R\,A\,R^T)_{ij}\,\vec{e_i}\,\vec{e_j}$，那么 $\overleftrightarrow{B}$ 在被同样方式旋转得到的 $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ 表示的分量 $(D\,R\,A\,R^T\,D^T)_{km}$ 与 $\overleftrightarrow{A}$ 在 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ 表示的分量 A_{km} 必然相同。分量在这样的旋转和再更换基矢量后，值不会变，手性不改的坐标系变换和旋转操作形式上是互逆的。

6 结语

可以看到，2.4节、4.1.4节和5.2节都是将一些复杂的矢量计算简化为与张量的缩并，得到更加漂亮统一的含张量的方程形式。许多张量更高的一些阶其实是待缩并状态，缩并后最终要表达在方程里的量仍是矢量或者标量。站在更高的角度看问题，问题就会更简单。这也是为什么会有张量，我们会去构造张量。

7 练习题

计算量非常大，如有兴趣可以借助符号计算软件完成。

1. 证明 [托卡马克坐标系] 的基矢是正交的，给出与笛卡尔直角坐标系之间的方向余弦矩阵。给出相应的哈密顿算符、拉普拉斯算符，和矢量的梯度、散度、旋度的表达式。

2. 解决 [椭球坐标系] 下相同的问题。

参考材料

[速度势、流函数细谈] https://github.com/el2718/thoughts/releases/tag/thoughts

[张量分析] http://www.tup.tsinghua.edu.cn/booksCenter/book_07179202.html

[矢量分析] http://www.mecmath.net/index.html

[NRL Plasma Formulary] https://www.nrl.navy.mil/Portals/38/PDF%20Files/NRL_Plasma_Formulary_2023.pdf

[epsilon_delta.f90] http://space.ustc.edu.cn/users/1367579391JDEkeVpzVnBZT3QkL1FxL01GR3g3bkJBL3NsNUV2MTEwLw/blog/20131102030701.711/20150125021537.956/at/epsilon_delta.f90

[拉梅系数应用的几何理解] https://zhuanlan.zhihu.com/p/452461912

[速度梯度分量变换.nb] http://space.ustc.edu.cn/users/1367579391JDEkeVpzVnBZT3QkL1FxL01GR3g3bkJBL3NsNUV2MTEwLw/blog/20131102030701.711/20150125021537.956/at/%CB%D9%B6%C8%CC%DD%B6%C8%B7%D6%C1%BF%B1%E4%BB%BB.nb

[多元函数泰勒展开] https://sites.math.washington.edu/~folland/Math425/taylor2.pdf

[托卡马克坐标系] https://baike.baidu.com/item/%E5%9C%86%E7%8E%AF%E5%9D%90%E6%A0%87%E7%B3%BB

[椭球坐标系] https://baike.baidu.com/item/%E6%A4%AD%E7%90%83%E5%9D%90%E6%A0%87%E7%B3%BB