欧拉势与磁冻结及磁通守恒

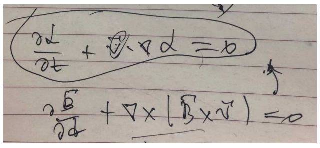
陈俊

School of Astronomy and Space Science, Nanjing University

el2718chenjun@nju.edu.cn

更新时间：2024 年 11 月 22 日

前言



2015 年 12 月 AGU，Viacheslav S. Titov 告诉我欧拉势带入磁冻结方程是随体不变的，就自己证了一下。

1　欧拉势简介

与 [速度势、流函数细谈] 的 3.5 节几乎相同，由于磁场无源

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

磁场可以由欧拉势描述

$$\boldsymbol{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta. \tag{2}$$

在过 A 点 α 的等值面

$$\alpha(x, y, z) = \alpha|_A \tag{3}$$

上，设 $\mathbf{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ 为此等值面上的一线元，对式(3)两边求全微分，有

$$\left.\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\right|_A = 0,$$

即

$$\nabla\alpha|_A \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} = 0, \tag{4}$$

故 $\nabla\alpha|_A$ 为曲面 $\alpha = \alpha|_A$ 上过 A 点的一个法向矢量，同理 $\nabla\beta|_A$ 为曲面 $\beta = \beta|_A$ 上过 A 点的一个法向矢量。由式(2)，$\boldsymbol{B}|_A$ 与 $\alpha = \alpha|_A, \beta = \beta|_A$ 的法向矢量都垂直，即与 $\alpha = \alpha|_A, \beta = \beta|_A$ 两曲面都相切。所以 $\alpha = \alpha|_A$ 为过 A 点的一个磁面（磁力线处处与之切，或者说如果一根磁力线与这个面有交点，则这根磁力线所有点都在这个面上），对 β 亦是如此。所以 $\alpha = \alpha|_A$ 与 $\beta = \beta|_A$ 的交线为过 A 点的一条磁力线。

磁通

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_S \nabla \times (\alpha \nabla \beta) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \alpha \nabla \beta \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} = \oint_{\partial S} \alpha \, \mathrm{d}\beta, \tag{5}$$

用 $\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2$ 四个曲面 ($\alpha_1 < \alpha_2, \beta_1 < \beta_2$) 为边裁出一根磁流管 ($[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$)，设 S_0 为此磁流管的一个截面，$\mathbf{d}\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 基本同向，则

$$\begin{aligned}
\int_{S_0} \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha \, \mathrm{d}\beta \Big|_{\beta=\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \alpha_2 \, \mathrm{d}\beta + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \alpha \, \mathrm{d}\beta \Big|_{\beta=\beta_2} + \int_{\beta_2}^{\beta_1} \alpha_1 \, \mathrm{d}\beta \\
&= 0 + \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + 0 - \alpha_1 (\beta_2 - \beta_1) \\
&= (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1).
\end{aligned} \tag{6}$$

任意截面都可以由无数个类似 S_0 的小矩边曲面拼接而成，这些矩边曲面的磁通都已由式(6)确定，对这些磁通求和，式(5)等价于

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_S \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta. \tag{7}$$

2 磁冻结，磁通守恒

对于磁感应方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B}), \tag{8}$$

将式(2)带入无电阻情形（$\eta = 0$），即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \, \nabla\alpha \times \nabla\beta}{\partial t} &= \nabla \times [\boldsymbol{u} \times (\nabla\alpha \times \nabla\beta)] \\
\frac{\partial \, \nabla\alpha}{\partial t} \times \nabla\beta - \frac{\partial \, \nabla\beta}{\partial t} \times \nabla\alpha &= \nabla \times [(\boldsymbol{u} \cdot \nabla\beta)\nabla\alpha - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha)\nabla\beta] \\
&= \nabla(\boldsymbol{u} \cdot \nabla\beta) \times \nabla\alpha - \nabla(\boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha) \times \nabla\beta,
\end{aligned}$$

整理得

$$\nabla \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha\right) \times \nabla\beta = \nabla \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\beta\right) \times \nabla\alpha. \tag{9}$$

此方程的一个特解是

$$\frac{\mathrm{D}\,\alpha}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial\ \alpha}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{D}\,\beta}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial\ \beta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\beta = 0, \tag{11}$$

即 α, β 随流体元运动不变，故磁力线和流体元被冻结在一起，但流体元可以沿磁力线流动。或者说这个解是对 α, β 的一个冻结规范。

随时间演化，无论截面 S 如何变形，α, β 的分布不变，由式(7)，磁通守恒。

有电阻时（$\eta \neq 0$），磁场会发生耗散，磁冻结和磁通守恒将不再严格成立。

参考材料

[速度势、流函数细谈] https://github.com/el2718/thoughts/releases/tag/thoughts